No filme O parque dos dinossauros, *aparece um matemático discutindo caos. O livro* Caos, *do jornalista James Gleick, continua na lista dos mais vendidos. Os personagens da famosa peça* Arcadia, *de Tom Stoppard, discutem o significado do caos. Por que todo esse barulho sobre caos? Caos é uma nova ciência que estabelece a constante presença da imprevisibilidade como uma característica fundamental da experiência cotidiana.*

Uma nas **praias** do

Steve Smale
Departamento de Matemática, Universidade da Cidade de Hong Kong (China)

Versão adaptada de artigo a ser publicado do CongressoInternacional de Ciência e Tecnologia – 45 anos do CNPq

Segundo o determinismo, bastaria conhecer o estado atual do mundo para determinar com precisão o seu futuro. Essa crença, que prevaleceu no pensamento científico por dois séculos, baseava-se na mecânica, na qual as equações do movimento, idealizadas pelo físico e matemático inglês Isaac Newton (1642-1727), descrevem como sistemas naturais evoluem com o passar do tempo. Essas equações têm como propriedade matemática o fato de ser possível determinar a qualquer momento o estado de um sistema com base apenas nas condições iniciais. Isso foi considerado como

ferradura
Rio de Janeiro

NAZARÉ, 1999

a prova da validade do determinismo filosófico. Alguns foram tão longe que chegaram a ver no determinismo a negação do livre-arbítrio e, por conseguinte, até mesmo da responsabilidade humana.

Porém, no início deste século, com o advento da mecânica quântica (teoria para estudar os fenômenos que ocorrem em nível atômico e molecular), percebeu-se que o determinismo não era sustentável. Pelo menos, para elétrons, prótons e átomos, descobriu-se que a incerteza prevalecia. As equações de movimento da mecânica quântica produzem soluções que são probabilidades evoluindo no tempo.

Apesar da mecânica quântica, as equações de Newton governam o movimento de um pêndulo, o comportamento do Sistema Solar, a evolução do clima, entre muitos outros fenômenos macroscópicos. Portanto, a revolução quântica deixou o determinismo intacto em vários aspectos. Logo depois da Segunda Guerra Mundial, por exemplo, os cientistas acreditavam no êxito de previsões climáticas em longo prazo, quando os recursos computacionais crescessem suficientemente.

Sede do IMPA em Botafogo (ao lado) e a atual, no Jardim Botânico (acima)

Mas, na década de 1970, a comunidade científica conheceu uma nova revolução: a teoria do caos, que a meu ver desfecha um golpe mortal na imagem newtoniana do determinismo. O mundo sabe agora que é preciso lidar com a imprevisibilidade para compreender a experiência cotidiana. A síndrome de 'cara ou coroa' é onipresente. A 'dependência sensível às condições iniciais' tornaram-se palavras-chave na ciência moderna.

A contribuição do caos vai muito além de ampliar o domínio da incerteza, como a mecânica quântica fez mais de meio de século atrás. A teoria do caos permitiu uma compreensão mais profunda da dinâmica e trouxe nova luz a todos os campos da ciência. Suas realizações vão da análise de eletrocardiogramas à ajuda na construção de dispositivos computacionais.

O caos não se desenvolveu a partir de leis recém-descobertas, mas sim de uma análise mais profunda das equações da física newtoniana. O caos é uma revolução científica baseada na matemática – na dedução e não na indução. O caos parte das equações de Newton e usa a análise matemática para provar a ampla imprevisibilidade presente em fenômenos descritos por essas equações. Através da matemática, estabelece-se a falência do determinismo newtoniano, usando as próprias leis de Newton!

O **dinheiro** dos contribuintes

Em 1960, eu estava no Rio de Janeiro recebendo uma bolsa de pós-doutoramento da Fundação Nacional de Ciências (NSF) dos EUA. Estava pesquisando numa área da matemática que viria a ser a teoria do caos. Mais tarde, o uso de dinheiro dos contribuintes para financiar pesquisas realizadas nas praias do Rio foi questionado. Nada menos que Donald Hornig, assessor científico do presidente Lyndon Johnson (1908-1973), escreveu, em 1968, na revista *Science*:

> *'Esse espírito brincalhão leva os matemáticos a propor seriamente que o cidadão comum, que paga os impostos, deve achar que a criatividade matemática deveria ser apoiada com dinheiro público, nas praias do Rio ...'*

O que aconteceu nos oito anos decorridos entre o trabalho nas praias e essa condenação nacional?

A década de 1960, em Berkeley (Califórnia, EUA), onde eu era professor, foi turbulenta. Meus alunos eram presos; gás lacrimogêneo freqüentemente pairava na atmosfera do *campus*; conferências sobre dinâmica realizavam-se durante toques de recolher; Theodore Kaczynski, hoje suspeito de ser o 'Unabomber', era um de meus colegas no departamento de matemática.

A Guerra do Vietnã ganhou força com o presidente Johnson em 1965, e eu fui levado a estabelecer com Jerry Rubin uma frente de resistência ao conflito. Nossa organização, o *Vietnam Day Committee*, com seus comícios, manifestações junto aos trens de transportes de tropas e grandes marchas, colocou-me nas primeiras páginas dos jornais. Esses acontecimentos levaram-me a ser intimado pelo Comitê de Atividades Antiamericanas, quando estava a caminho de Moscou para receber a medalha Fields, em 1966. A conferência de imprensa que dei em Moscou, atacando a política norte-americana na guerra do Vietnã, assim como a intervenção russa na Hungria, gerou um longo furor em Washington.

Vamos remontar ao que realmente aconteceu naquela primavera de 1960 nessas praias do Rio de Janeiro.

Voando para o **Rio**

Na década de 1950, uma explosão de idéias em topologia despertou a atenção de muitos jovens estudantes como eu. Em 1956, eu terminava a minha tese de doutorado nesse assunto na Universidade de Michigan. Naquele verão, eu, com minha esposa, Clara, assisti na cidade do México a uma conferência que refletia esse grande movimento da matemática, na qual estrelas internacionais da topologia faziam palestras. Lá, encontrei um brasileiro, Elon Lima, que estava preparando uma tese em topologia na Universidade de Chicago – aonde eu estava indo para dar aulas –, e nos tornamos bons amigos.

Poucos anos depois, Elon apresentou-me a Maurício Peixoto, um jovem professor visitante do Brasil. Maurício era do Rio, embora tenha vindo de um estado do norte do Brasil onde seu pai havia sido governador. Uma pessoa agradável e bem-humorada, Maurício, apesar de suas ocasionais explosões de entusiasmo, era conservador em suas maneiras e na sua política. Como era típico para os raros matemáticos que trabalhavam no Brasil naquela época, ele tinha um emprego de professor numa escola de engenharia. Maurício também ajudou a fundar um novo instituto de matemática, o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Em 1957, suas aspirações trouxeram-no para os Estados Unidos para prosseguir em suas pesquisas. Mais tarde, ele se tornaria o presidente da Academia Brasileira de Ciências.

Maurício estava trabalhando em equações diferenciais e em dinâmica e mostrou-me resultados muito bonitos. Pouco depois, eu mesmo demonstraria alguns teoremas de dinâmica.

No verão de 1958, Clara e eu, com nosso filho recém-nascido, Nat, mudamo-nos para o Instituto de Estudos Avançados, em Princeton, Nova Jersey, no qual deveria passar dois anos com uma bolsa de pós-doutoramento da NSF. Entretanto, devido a nossos interesses comuns em matemática, Maurício e Elon convidaram-me para terminar o segundo ano no Rio de Janeiro. Assim, Clara e eu, bem como nossos filhos, Nat e a recém-chegada Laura, partimos de Princeton, em dezembro de 1959, para o Rio de Janeiro.

As crianças eram tão jovens que a maior parte de nossa bagagem era formada por fraldas. No entanto, conseguimos realizar uma velha ambição, a de conhecer a América Latina. Depois de visitar a mata panamenha, nós quatro saímos de Quito, no Equador, no natal de 1959, no famoso trem andino para Guayaquil. Pouco depois, voamos para o Rio e recuperamo-nos, pois estivemos adoentados em Lima. Ainda tenho a vívida lembrança de nossa chegada à noite e de sair diversas vezes para tentar conseguir leite para nossas crianças, que estavam chorando, voltando com um substituto para o leite como creme ou iogurte. Ficamos sabendo, mais tarde, que o leite no Rio só era vendido de manhã, na rua. Naquele tempo, o Brasil realmente fazia parte do 'Terceiro Mundo'.

Entretanto, nossos amigos logo nos ajudaram a nos adaptar à vida brasileira. Chegamos pouco depois de uma tentativa de golpe por um coronel da Força Aérea. Ele fugiu do país para se refugiar na Argentina, e nós pudemos alugar de sua esposa seu luxuoso apartamento de 11 cômodos no bairro do Rio chamado Leme. O dólar estava muito valorizado naqueles dias, e até pudemos contratar as duas empregadas do coronel, tudo isso com o dinheiro da bolsa.

Sentados na varanda do apartamento, num andar elevado do prédio, podíamos ver a favela do morro da Babilônia, onde o filme *Orfeu Negro* foi rodado. No calor úmido das noites que precediam o carnaval, víamos centenas de moradores da favela descer para o samba nas ruas. Às vezes, juntava-me às danças desenfreadas que se arrastavam por quilômetros. Na frente de nosso apartamento, afastado do morro, ficava a famosa praia de Copacabana. Eu passava minhas manhãs nessa ampla e bela praia, nadando e surfando com o corpo nas ondas. Também levava caneta e papel e trabalhava em matemática.

Matemática na praia

Logo depois de nossa chegada ao Rio, eu já estava fazendo pesquisa em matemática. A instituição que me hospedou, o IMPA, mantido pelo governo brasileiro, deu-me uma sala e um ambiente agradável. Dois anos antes, o IMPA havia-se instalado num pequeno prédio colonial num bairro antigo do Rio, chamado Botafogo. Não havia graduação em matemática, apenas um punhado de estudantes de pós-graduação. Havia também poucos pesquisadores, como Peixoto, Lima e um terceiro dedicado ao estudo da análise matemática, Leopoldo Nachbin (1922-1993). Também havia uma boa biblioteca de matemática. Mas ninguém poderia adivinhar que em menos de três décadas, o IMPA se tornaria um centro mundial de sistemas dinâmicos, sediado em um prédio palaciano, bem como um centro de referência para toda a ciência brasileira.

Numa tarde típica, eu tomava um ônibus para o IMPA e logo estava discutindo topologia com Elon, dinâmica com Maurício ou consultando livros na biblioteca. A pesquisa em matemática não requer muito – um bloco de papel, uma caneta esferográfica, uma boa biblioteca e colegas com quem discutir. Eu estava satisfeito.

As horas passadas na praia eram especialmente agradáveis. Meu trabalho consistia mais em anotar idéias e tentar perceber como os argumentos podiam-se encadear. Rascunhava diagramas de objetos geométricos flutuando no espaço e tentava relacionar essas imagens com deduções formais. Profundamente mergulhado nesse tipo de raciocínio e escrevendo num bloco de notas, as distrações da praia não me atrapalhavam. Era bom poder se desligar da pesquisa de vez em quando para nadar.

O surfar com o corpo nas ondas era um desafio excitante e algumas vezes bem assustador. Uma vez, quando Lima visitou minha 'sala' na praia, fomos praticar esse tipo de surfe e ficamos presos numa correnteza que nos arrastou mar adentro. Enquanto Elon sentia sua vida esvaindo-se, banhistas gritaram, aconselhando que nadássemos paralelamente à praia, até um ponto de onde pudéssemos voltar (34 anos mais tarde, logo antes do carnaval, a mesma coisa me aconteceu nessas mesmas praias. Dessa vez, uma onda muito alta jogou-me no chão com tanta força que machuquei meu pulso e o tendão do ombro. Essa mesma onda arrastou-me para o mar. Tive a sorte de poder voltar nadando com o braço que não estava machucado).

Cartas da América

Naquela época, como topólogo, orgulhava-me de ter publicado um artigo em sistemas dinâmicos. Estava muito feliz com uma conjectura naquele artigo que implicava (segundo a terminologia moderna) que 'o caos não existe'!

Essa euforia foi logo abalada por uma carta que recebi de Norman Levinson. Conhecia-o como co-autor do principal livro-texto para pós-graduação sobre equações diferenciais ordinárias e como um cientista que tinha de ser levado a sério.

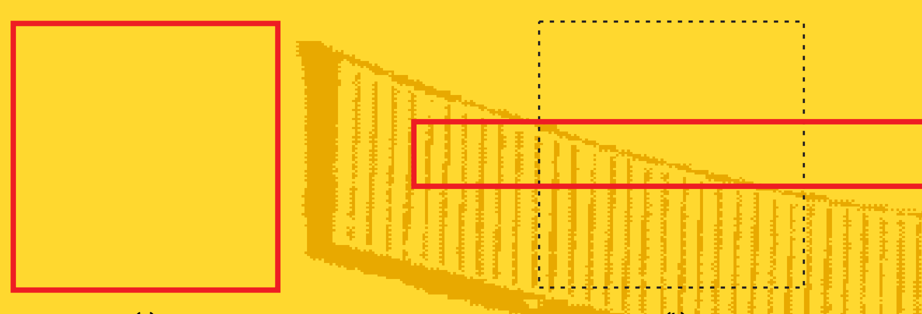
A **ferradura** de Smale

A forma mais tradicional de se descrever como os estados de um sistema físico evoluem com o tempo é usando expressões algébricas. Mas, muitas vezes, a descrição de um sistema dinâmico através de fórmulas é complicada, dada a complexidade de muitos fenômenos naturais.

Em vez de uma descrição algébrica, Steve Smale usou neste caso uma mais geométrica, como se verá a seguir. Para entender a ferradura, é preciso primeiramente imaginar um quadrado que é esticado na horizontal, por exemplo, e compactado até formar um retângulo. Em seguida, esse retângulo é dobrado, formando uma figura semelhante a uma ferradura, como mostram as seqüências da figura 1.

Nessa transformação do quadrado em uma ferradura, certos pontos não saem da área limitada pelo quadrado original. Pode-se mostrar a estreita relação da transformação 'ferradura', como um sistema dinâmico determinístico, com um fenômeno de natureza imprevisível, baseado nas leis da probabilidade: o jogo de cara ou coroa.

Figura 1. Na ferradura de Smale, um quadrado inicial (a) é esticado, compactado na forma de um retângulo (b) e depois dobrado, até atingir a forma de uma ferradura (c).



Levinson escreveu-me sobre um resultado seu anterior, o qual efetivamente continha um contra-exemplo à minha conjectura. Por sua vez, seu artigo era baseado num extenso trabalho dos matemáticos ingleses Mary Cartwright (1900-1998) e John Littlewood (1885-1977), realizado durante a Segunda Guerra Mundial. Cartwright e Littlewood estavam analisando equações que surgiram ao estudarem ondas de rádio em trabalhos feitos durante o esforço de guerra. Tinham encontrado comportamentos inesperados e pouco comuns nas soluções dessas equações. Na realidade, Cartwright e Littlewood encontraram indícios de caos, até mesmo em equações que surgiram em problemas de engenharia. Mas o mundo não estava ainda preparado para dar atenção a isso. Nunca encontrei Littlewood, mas em meados da década de 1960, *Dame* Mary Cartwright, na época diretora de uma faculdade para moças (Girton), da Universidade de Cambridge (Inglaterra), convidou-me para uma refeição na *high table*. (*N. da R.: formalidade característica da Universidade de Cambridge em que se come e se bebem vinhos de boa qualidade*).

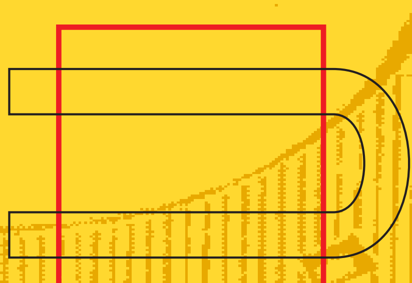
Trabalhei noite e dia tentando solucionar o desafio colocado pela carta de Levinson às minhas idéias. Era necessário traduzir seus argumentos analíticos para a minha forma geométrica de pensar. Pelo menos para mim, a compreensão da matemática não vem de ler nem de escutar. Vem de repensar o que vejo ou ouço. Tenho de refazer a matemática no contexto de minha própria formação. E essa formação consiste de muitas trilhas, algumas profundas e outras menos, algumas algébricas, algumas visuais. Meus conhecimentos de análise geométrica são maiores, mas encontro dificuldades em acompanhar uma sucessão de fórmulas. Tendo a ser mais lento que a maioria dos matemáticos para entender um argumento. A literatura matemática é útil, porque ela fornece pistas que freqüentemente podem ser usadas para formar uma imagem convincente. Só sinto que entendi depois que reorganizei a matemática em meus próprios termos e não antes.

Por fim, convenci-me de que, na verdade, Levinson tinha razão e que a minha conjectura estava errada. O caos já estava implícito nas análises de Cartwright e Littlewood. O paradoxo estava resolvido, e minha suposição estava errada. Mas, ao aprender isso, descobri a ferradura (ver 'A ferradura de Smale').

De fato, repare que a ferradura corresponde a uma transformação que leva um ponto do quadrado (1a) a um ponto do plano quando esticamos o quadrado na horizontal e o achatamos na vertical para formar um retângulo (1b) e depois curvamos o retângulo (e aqui a transformação é não-linear) para que o transformado do quadrado inicial fique como a ferradura indicada na figura 1c.

Um movimento visual corresponde a começar num ponto do quadrado e acompanhar seus sucessores consecutivos pela transformação em ferradura: $x_0, x_1, x_2, \ldots$ é um movimento visual em tempos $i = 0, 1, 2, \ldots$ que supomos não deixar o quadrado inicial e ao qual associamos uma seqüência de caras ou coroas conforme os pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots$ estiverem no sub-retângulo de cima ou no de baixo, segundo mostra a figura 2.

Portanto, a ferradura de Smale é uma forma geométrica de se descrever um sistema dinâmico determinístico, em que se mostra a presença da imprevisibilidade da dinâmica em longo prazo (isto é, para tempos muitos longos).



(c)

Figura 2. As duas faixas horizontais sombreadas mostram os pontos que, na transformação em ferradura, não saem da área limitada pelo quadrado original. Esses pontos formam um conjunto totalmente desconexo: um fractal de dimensão entre zero e um chamado conjunto de Cantor

As origens ocultas do caos

O caos é uma revolução com base matemática. Assim, não é surpreendente que um matemático tenha sido o primeiro a ver evidências de caos na dinâmica.

O matemático francês Henri Poincaré (1854-1912) foi, juntamente com o alemão David Hilbert (1862-1943), um dos dois maiores matemáticos do mundo no fim do século passado. Ouvi falar dele primeiramente como a pessoa que deu origem à topologia e que escreveu um artigo no qual apresentou o que é conhecido hoje como 'conjectura de Poincaré' (ver 'Conjectura de Poincaré').

Porém, mais pertinente à minha história é a contribuição de Poincaré ao estudo da dinâmica. Ele fez extensos estudos em mecânica celeste, isto é, sobre o movimento dos planetas. Nessa época, havia o famoso problema sobre como provar que as equações fundamentais da mecânica celeste tinham solução, e, de fato, Poincaré pensou ter provado isso. Pouco depois, entretanto, ficou traumatizado por uma descoberta que não só mostrou que estava errado, mas provou a impossibilidade de resolver as equações mesmo quando só três corpos estão envolvidos. Ele chamou a descoberta 'ponto homoclínico.'

Um ponto homoclínico é um movimento que tende para um equilíbrio à medida que o tempo cresce e também tende para o mesmo equilíbrio à medida que o tempo retrocede ao passado. Na figura 3, o ponto *p* é um equilíbrio, e *h* marca o ponto homoclínico. As setas representam a direção do tempo.

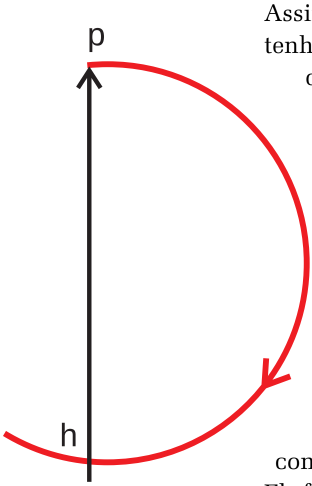


Figura 3. Um ponto homoclínico (*h*) é um movimento que tende a um equilíbrio (*p*) à medida que o tempo avança, bem como tende à mesma situação de equilíbrio se o tempo retrocede ao passado. As setas mostram a direção do tempo

Esta definição parece inocente, mas tem conseqüências extraordinárias. Poincaré escreveu em relação à sua descoberta:

> *'Uma pessoa ficaria chocada pela complexidade dessa figura, que eu nem tentarei desenhar. Nada pode dar uma idéia mais clara sobre a complexidade do problema de três corpos e em geral de todos os problemas da dinâmica...'*

Além de mostrar a impossibilidade de resolver as equações do movimento planetário, o ponto homoclínico tornou-se a marca registrada do caos, sendo encontrado praticamente em todo sistema dinâmico caótico.

Foi na primeira metade deste século que a matemática norte-americana se desenvolveu, e as tradições originadas com Poincaré na topologia e na dinâmica foram centrais nesse desenvolvimento. George David Birkhoff (1884-1944) foi o mais conhecido matemático norte-americano antes da Segunda Guerra Mundial. Veio de Michigan e fez seus estudos de pós-graduação na Universidade de Chicago, antes de se fixar em Harvard. Birkhoff foi fortemente influenciado pelo trabalho de Poincaré em dinâmica e desenvolveu essas idéias nos seus artigos das décadas de 1920 e

Conjectura de Poincaré

A conjectura de Poincaré propõe que se um objeto geométrico qualquer tem certas propriedades específicas das esferas, então ele deve ser necessariamente uma esfera – na matemática, o nome conjectura aplica-se a uma hipótese considerada provavelmente verdadeira, mas ainda não demonstrada e, por ser uma questão básica em topologia, área da matemática que lida com formas espaciais como esferas, toros, entre outros objetos mais complicados, o problema ganhou fama na comunidade mundial de matemáticos.

Inicialmente, Poincaré pensou ter achado uma prova geral não só na dimensão igual a três, mas também em dimensões maiores. Mais tarde, porém, o matemático francês achou um erro em sua demonstração e se restringiu apenas à dimensão $n = 3$, colocando o problema na forma de uma 'afirmação' (não comprovada) que ficou conhecida como a conjectura que leva seu nome, sendo hoje "um dos três ou quatro grandes problemas da matemática ainda não resolvidos", segundo Smale.

No início de sua carreira, Smale trabalhou na conjectura e chegou a uma prova matemática para dimensões maiores que quatro. Por esses resultados, ganhou o prêmio Veblen, da Sociedade Norte-americana de Matemática, e a Medalha Fields, prêmio com prestígio equivalente a um 'Nobel' dado pela União Internacional de Matemática.

1930, especialmente sobre as propriedades dos pontos homoclínicos.

Infelizmente, a comunidade científica não acompanhou as idéias importantes relacionadas aos pontos homoclínicos de Poincaré. Nas reuniões sobre equações diferenciais e dinâmica, às quais assisti no fim da década de 1950, não havia menção a esses trabalhos. Mesmo Levinson nunca fez menção em seu livro, seus artigos ou sua correspondência comigo de que ele conhecia os pontos homoclínicos.

É espantoso como idéias importantes podem-se perder, mesmo quando elas são lançadas por importantes matemáticos de décadas anteriores.

Conheci os pontos homoclínicos e os trabalhos de Poincaré folheando a coletânea de obras de Birkhoff, que encontrei na biblioteca do IMPA. Foi por causa da então recente descoberta da ferradura que a paisagem homoclínica penetrou minha consciência. De fato, havia uma relação importante entre ferraduras e pontos homoclínicos.

Demonstrei que, se um processo dinâmico tem um ponto homoclínico, ele também contém uma ferradura, como pode ser visto na figura 4. Portanto, a síndrome do lançamento da moeda é a base do fenômeno homoclínico e ajuda a entendê-lo.

A terceira força

Tive a sorte de me encontrar no Rio na confluência de três tradições históricas diferentes na área de dinâmica. Essas três correntes, apesar de trabalharem com o mesmo tema, estavam isoladas umas das outras, e esse isolamento dificultava o seu desenvolvimento. Já discuti duas dessas forças, isto é, resultados de Cartwright-Littlewood-Levinson e os de Poincaré-Birkhoff.

A terceira tem suas raízes na Rússia, com a escola de equações diferenciais de Alexander Andronov (1901-1952), em Gorki, na década de 1930. Andronov já tinha morrido antes de minha primeira viagem à União Soviética, mas em Kiev, em 1961, conheci sua esposa, Andronova-Leontovich, que ainda estava trabalhando em Gorki, em equações diferenciais.

Em 1937, Andronov colaborou com o matemático soviético Lev Pontryagin (1908-1988). Pontryagin ficou cego aos 14 anos, mas mesmo assim tornou-se um pioneiro em topologia. Os dois descreveram, com base num enfoque geométrico, as equações diferenciais que chamaram 'robustas' e que depois ficaram conhecidas como estabilidade estrutural. O caos, em contraste com as duas tradições previamente mencionadas, estava ausente desses resultados por causa da classe restrita da dinâmica.

Quinze anos mais tarde, o norte-americano Solomon Lefschetz (1884-1972), grande especialista em topologia, ficou entusiasmado com o trabalho de Andronov e Pontryagin. Antes de se tornar matemático, Lefschetz também havia sofrido um acidente que o privou de seus braços e que talvez tenha promovido uma certa ligação entre ele e o cego Pontryagin. Eles encontraram-se pela primeira vez numa conferência de topologia em Moscou, em 1938, e de novo depois da Segunda Guerra. Foi através da influência de Lefschetz, em particular de um artigo de seu aluno De Baggis, que Maurício Peixoto, no Brasil, tomou conhecimento da estabilidade estrutural.

Peixoto veio para Princeton para trabalhar com Lefschetz em 1957, e esse foi o caminho que levou a nos encontrarmos através de Elon. Depois desse encontro, estudei o livro de Lefschetz sobre uma teoria geométrica das equações diferenciais e mais tarde vim a conhecê-lo em Princeton.

Graças a Pontryagin e Lefschetz, surgia o espectro da topologia no conceito da estabilidade estrutural de equações diferenciais ordinárias. Acredito que foi por isso que ouvi o que Maurício tinha a dizer.

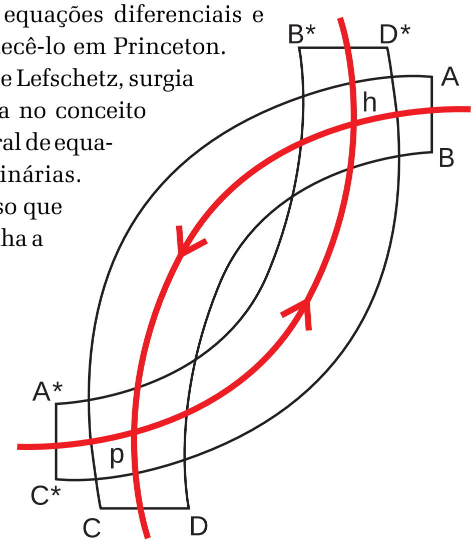


Figura 4. Se um processo dinâmico tem um ponto homoclínico (*h*), que faz com que o sistema retorne sempre a uma situação de equilíbrio (*p*), ele então também terá uma ferradura. As setas mostram a direção do tempo

Boa sorte

Por vezes, uma ferradura é considerada um amuleto que traz boa sorte. A ferradura que achei nas praias do Rio certamente parece ter tido tal propriedade.

Naquela primavera de 1960, eu era antes de tudo um especialista em topologia, motivado principalmente pelos problemas dessa área e acima de tudo pelo grande problema não resolvido proposto por Poincaré. Desde o início de minhas pesquisas em matemática, eu havia produzido demonstrações falsas da conjectura tridimensional de Poincaré, retornando sempre a esse mesmo problema.

Então, naquelas praias, dois meses depois de descobrir a ferradura, tive para minha surpresa uma idéia que me levou de volta à afirmação original de Poincaré, restringindo o problema então a cinco ou mais dimensões. De fato, a idéia não só levou à solução da conjectura de Poincaré em dimensões maiores que quatro, mas também permitiu obter um grande número de outros resultados bonitos em topologia. Foi por esse trabalho que recebi a medalha Fields em 1966.

Assim, segundo Hornig, "...a matemática criada nas praias do Rio..." foi a ferradura e a conjectura de Poincaré para dimensões mais altas. ■

Sugestões para leitura

GLEICK, J. *Caos*, Rio de Janeiro, Editora Campus, 1989.
STEWART, I. *Será que Deus joga dados? — A nova matemática do caos*, Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor, 1991.