

Modelos Constitutivos para Ligas com Memória de Forma

Alberto Paiva

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Departamento de Engenharia Mecânica
22.453.900 – Rio de Janeiro - RJ
E-Mail: paiva@mec.puc-rio.br

Marcelo Amorim Savi

Universidade Federal do Rio de Janeiro
COPPE - Departamento de Engenharia Mecânica
21.945.970 – Rio de Janeiro – RJ, Caixa Postal 68.503
E-Mail: savi@ufrj.br

Pedro Manuel C. L. Pacheco

CEFET/RJ
Departamento de Engenharia Mecânica
20.271.110 - Rio de Janeiro - RJ
E-Mail: calas@cefet-rj.br

1. RESUMO

Os materiais inteligentes tem instigado uma série de pesquisas vislumbrando aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento. Dentre esses materiais, vale destacar as ligas com memória de forma que são ligas metálicas que apresentam propriedades de retornar para uma forma previamente definida quando submetidas a um carregamento termomecânico apropriado. Este trabalho apresenta uma breve discussão sobre o comportamento termomecânico das ligas com memória de forma, apresentando uma revisão sobre os modelos constitutivos utilizados para descrever o seu comportamento. Uma coleção de resultados de simulações de diferentes modelos mostra que, apesar de extensamente investigada, a modelagem desses materiais ainda é um tema em aberto.

2. PALAVRAS CHAVES

Ligas com memória de forma, pseudoelasticidade, modelos constitutivos, simulação numérica.

3. INTRODUÇÃO

Os materiais inteligentes, usualmente utilizados como atuadores e sensores nas chamadas estruturas inteligentes, têm a capacidade de alterar a sua forma, rigidez, frequências naturais dentre outras características

mecânicas, mediante a imposição de campos elétricos, eletromagnéticos ou de temperatura. Atualmente, os atuadores mais comuns encontrados em estruturas inteligentes são as ligas com memória de forma, as cerâmicas piezoelétricas, os materiais magneto-strictivos e os fluidos eletro-reológicos (Rogers, 1995).

Os materiais com memória de forma (*Shape Memory Alloys* – **SMA**s) são ligas metálicas que permitem a recuperação da geometria original do corpo, ou o desenvolvimento de consideráveis forças de restituição ao se restringir a recuperação de sua forma original, após a imposição de um campo de temperatura e/ou de tensões, através de transformações de fase induzidas no material. Basicamente, as **SMA**s apresentam duas fases cristalográficas distintas: austenita e martensita.

A necessidade de uma análise mais precisa do comportamento termomecânico das **SMA**s tem tornado cada vez maior o interesse no desenvolvimento de modelos matemáticos capazes de descrevê-lo de forma adequada, permitindo explorar todo seu potencial. A modelagem destas ligas possui duas abordagens distintas. A primeira, microscópica, tem um enfoque que leva em consideração aspectos metalúrgicos das ligas, tendo sido tratada por diversos autores. A segunda abordagem, macroscópica, apresenta uma preocupação com os aspectos fenomenológicos. Dentro dessa linha, a seguinte classificação pode ser proposta: modelos polinomiais, modelos com cinética de transformação de fase assumida, modelos com restrições internas e modelos baseados na plasticidade.

O modelo polinomial proposto por Falk (1980, 1983, 1990) é baseado na teoria de Devonshire. Esse modelo unidimensional define uma energia livre de Helmholtz na forma polinomial e descreve os comportamentos de pseudoelasticidade e memória de forma. A grande vantagem desse modelo é a sua simplicidade.

Os modelos com cinética de transformação de fase assumida consideram funções matemáticas conhecidas para descrever a cinética das transformações de fase. O primeiro modelo a apresentar esta formulação foi proposto por Tanaka & Nagaki (1982), tendo dado origem a outros modelos que apresentam alterações nas funções de cinética de transformação como o de Liang & Rogers (1990), Brinson (1993), Ivshin & Pence (1994a,b), Boyd & Lagoudas (1996), dentre outros. Pelo fato de seu uso ter se popularizado, esses modelos apresentam maiores comprovações experimentais, ocupando um importante espaço na modelagem do comportamento das ligas com memória de forma.

Os modelos com restrições internas consideram restrições associadas à coexistência das diferentes fases do material. Nesse contexto, Fremond (1987, 1996) desenvolveu um modelo tridimensional que também representa os fenômenos de memória de forma e pseudoelasticidade, onde foram empregadas três variáveis internas que devem obedecer a restrições internas. Savi *et al.* (2002) e Baêta Neves *et al.* (2003) promoveram modificações no modelo original de Fremond, permitindo a descrição de uma variedade maior de fenômenos. Essa classe de modelos permite descrever os principais comportamentos das **SMA**s apresentando um menor número de restrições, quando comparada com a grande maioria das ferramentas já desenvolvidas. Knowles e co-autores (Abeyaratne *et al.*, 1994) propuseram um modelo unidimensional que estabelece critérios para nucleação das fases para as variáveis internas baseados na barreira energética que deve ser superada para que haja transformação de fase, além de leis de evolução baseadas na cinética de transformação entre as fases.

Os modelos baseados em plasticidade se propõem a explorar as idéias bem estabelecidas da teoria da elastoplasticidade (Simo & Taylor, 1986). Bertram (1982) propôs um modelo tridimensional utilizando conceitos de endurecimento cinemático e isotrópico. Mamiya e co-autores (Silva, 1995; Souza *et al.*, 1998) também apresentam um modelo capaz de descrever os fenômenos de memória de forma e pseudoelasticidade utilizando os conceitos da plasticidade. Os trabalhos de Auricchio e co-autores (Auricchio & Lubliner, 1997) também podem ser enquadrados nessa idéia. Inicialmente proposto para um contexto unidimensional, o modelo foi posteriormente extrapolado para um contexto tridimensional (Auricchio *et al.*, 1997; Auricchio & Sacco, 1997). Há, ainda, outros modelos que exploram conceitos utilizados pela plasticidade como Govindjee & Kasper (1997), Leclercq *et al.* (1995), dentre outros.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma discussão sobre os comportamentos associados às ligas com memória de forma, suas aplicações e sua modelagem constitutiva. A modelagem apresentada neste trabalho é fundamental para o desenvolvimento de diversas aplicações.

4. COMPORTAMENTO TERMOMECÂNICO

As ligas com memória de forma apresentam três fenômenos fundamentais: a pseudoelasticidade, a memória de forma (*Shape Memory Effect* - **SME**) e a transformação de fase devida à variação de temperatura. De fato, o

efeito de memória de forma pode ser obtido de duas formas: de uma via (*one-way*) ou reversível (*two-way*). O efeito de memória de forma reversível (*two-way SME – TWSME*), tem sido largamente estudado nos últimos anos (Miller & Lagoudas, 2000; Zhang *et al.*, 1997).

O fenômeno de transformações de fase martensíticas é responsável pelas propriedades das **SMA**s. Estas transformações são processos não-difusivos envolvendo fases sólidas que ocorrem a velocidades muito elevadas. Atribui-se a causa dessas transformações à diferença de energia livre entre as estruturas constituintes envolvidas no processo, o que induz modificações nas ligações químicas, tornando as transformações de fase de caráter essencialmente cristalográfico (Wasilevski, 1975).

Essas transformações apresentam como principais características a não-dependência do tempo, forte dependência da temperatura e a propriedade de reversibilidade. Outra característica importante é que o material pode ser submetido a esse processo repetidas vezes, sem perda das propriedades.

Estudos experimentais revelam a ocorrência de uma deformação macroscópica, envolvendo alteração da forma, quando um único cristal austenítico (que possui uma estrutura bem ordenada cúbica de corpo centrado) dá origem a um único cristal martensítico (cúbico de face centrada). Este cristal martensítico possui a forma de placa e, durante sua nucleação, é identificada uma interface ou plano de contato entre as duas fases (austenita e martensita) conhecida como plano de hábito. Já no caso da formação de diversos cristais simultaneamente aparecem problemas de acomodação entre os novos cristais martensíticos e os cristais austeníticos pré-existentes. Se não houver direção preferencial para os novos cristais, estes aproveitam a existência de diferentes planos de hábito possíveis, para formar diversas variantes (mesmas microestruturas com orientações diferentes). Caso haja uma direção preferencial, em geral induzida por um estado de tensões, todos os cristais obedecem a este plano de hábito favorável, constituindo assim, o processo de reorientação.

Funakubo (1987) indica a formação de vinte e quatro variantes de martensita a partir do resfriamento da fase matriz para o caso mais genérico, já que um plano de hábito e uma direção de orientação da deformação constituem uma variante. Estas vinte e quatro variantes são arrançadas em seis placas contendo quatro variantes cada. A aplicação de um carregamento dá início a um processo de conversão (*detwinning*) de três das quatro

variantes de martensita obtidas inicialmente em uma única que obedece à direção preferencial dada pelo alinhamento dos planos preferenciais com a direção principal do carregamento.

A seguir apresentam-se as principais características associadas ao comportamento termomecânico das **SMA**s.

4.1. TRANSFORMAÇÃO DE FASE DEVIDA À VARIÇÃO DE TEMPERATURA

Considere uma amostra de uma **SMA** a uma temperatura elevada e livre de tensões. O material apresenta uma microestrutura austenítica. A Figura 1(a) apresenta o fenômeno de transformação de fase devida à variação de temperatura, mostrado através da curva deformação-temperatura. Partindo do ponto **D**, com o decréscimo da temperatura, a estrutura cristalina experimenta uma transformação de fase martensítica (trecho **AB**) e conseqüente uma auto-acomodação destes cristais martensíticos. Este processo se inicia em $T = M_s$ (ponto **A**) e se desenvolve até que a temperatura $T = M_f$ (ponto **B**), abaixo da qual a martensita é estável, seja alcançada. Elevando-se a temperatura, a partir do ponto **B**, ao atingir A_s (ponto **C**), observa-se uma transformação de fase inversa (trecho **CD**), que persiste até que a temperatura A_f seja alcançada (ponto **D**).

Este fenômeno pressupõe três regiões distintas. Duas delas relacionadas aos trechos lineares que correspondem à expansão térmica das fases austenítica e martensítica e uma região onde há um laço de histerese relacionada aos trechos de transformação de fase. A área compreendida por este laço representa a energia dissipada durante o processo.

4.2. PSEUDOELASTICIDADE

Considere agora uma amostra a uma temperatura superior a A_f . Nesta situação, a fase austenítica é estável. De acordo com a Figura 1(b) que mostra uma curva tensão-deformação, para uma temperatura constante $T > A_f$, com a aplicação de um carregamento, o material se comporta elasticamente até que uma tensão crítica seja alcançada (ponto **A**), quando, então, dá-se início uma transformação de fase $A \Rightarrow M^+$ (trecho **AB**). O material passa por uma auto-acomodação devido à tensão aplicada, induzindo a formação de uma variante de martensita

(M^+), que se conclui no ponto **B**. Ao descarregar-se a amostra, o material experimenta uma transformação inversa $M^+ \Rightarrow A$ (trecho **CD**), já que para $T > A_f$ a martensita é uma fase instável na ausência de tensões.

É importante destacar, mais uma vez, o aparecimento de um laço de histerese, região compreendida entre os pontos **A**, **B**, **C** e **D**. Vale ressaltar que existe um limite à recuperação dessas deformações representado pelo limite elástico da fase produto obtida após a transformação, a partir de onde o material passa a se comportar plasticamente e a deformação não mais pode ser recuperada.

4.3. MEMÓRIA DE FORMA

Neste ponto, considere uma amostra de **SMA** com uma estrutura martensítica, obtida a partir do resfriamento de uma amostra a uma temperatura inferior a M_f . A Figura 1(c) mostra a curva tensão-deformação para esta amostra submetida a um carregamento termomecânico. Com a aplicação de um carregamento, tem-se uma resposta elástica até que uma tensão crítica seja alcançada (ponto **A**), dando início a um processo de reorientação da martensita resultando em uma única variante (no caso, martensita associada à tração, M^+). Durante este processo de reorientação, a tensão não se desenvolve muito em comparação com a deformação alcançada (trecho **AB**). A partir do ponto **B**, a liga volta a apresentar um comportamento elástico. Ao descarregar a amostra, não há uma nova conversão em diversas variantes, pois esta única variante resultante é termodinamicamente estável para $T < A_s$, havendo apenas uma recuperação elástica. A deformação residual resultante pode, então, ser recuperada através do aquecimento da amostra acima de A_f . Assim, o material retorna à fase austenítica, assumindo a configuração geométrica original, apresentando o efeito de memória de forma.

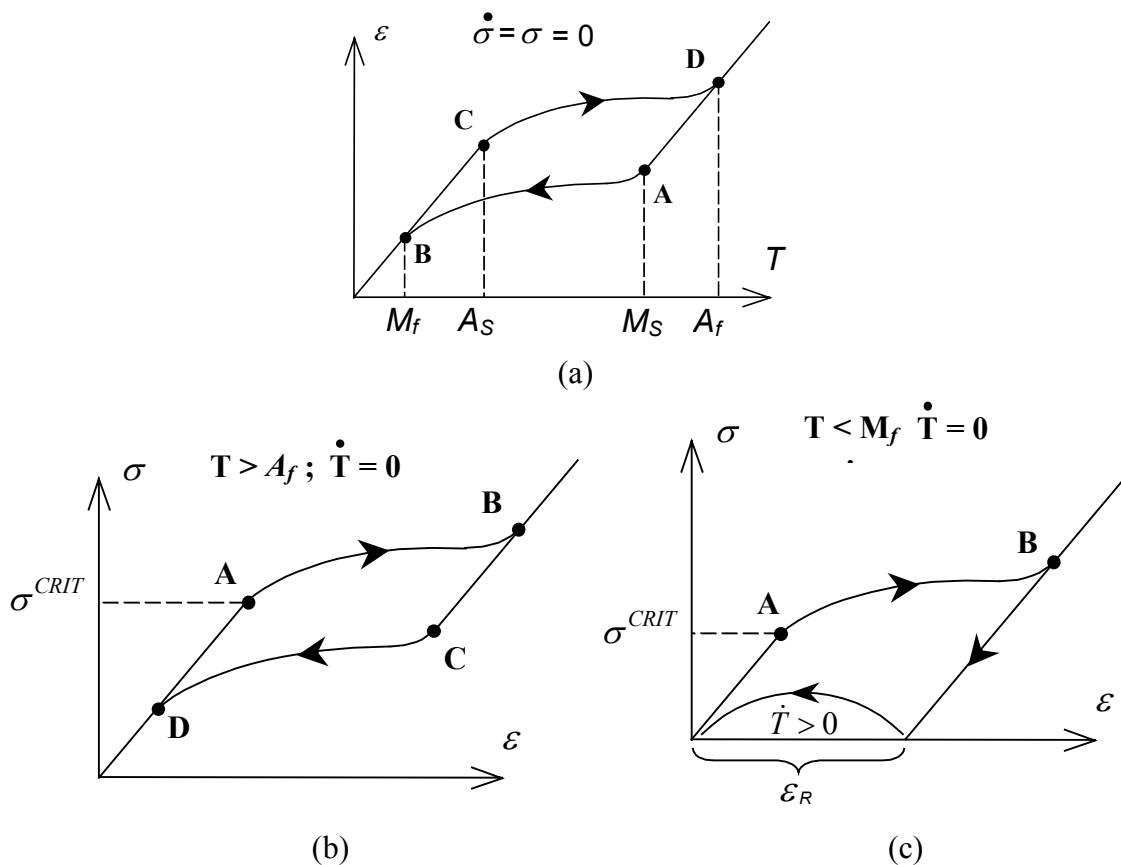


Figura 1 – (a) Transformação de fase devida à variação de temperatura.

(b) Pseudoelasticidade. (c) Memória de forma.

4.4. MEMÓRIA DE FORMA REVERSÍVEL

O efeito de memória de forma reversível é obtido após submeter uma liga com memória de forma a um processo de treinamento (Miller & Lagoudas, 2000; Zhang *et al.*, 1997) que permite associar uma forma a cada fase, em função da variação de temperatura.

Existem dois processos de treinamento para ligas com memória de forma denominados ciclos de **SME** (*shape memory effect cycling*) e treinamento através do aparecimento de martensita não-maclada (treinamento **SIM** ou *stress-induced martensite training*).

O processo de ciclos de **SME** é baseado no processo de plastificação da martensita após o processo de reorientação e consiste na aplicação de um carregamento até que o limite de escoamento da fase produto seja superado para temperatura constante e $T < M_f$. Por outro lado, o processo de treinamento **SIM** é obtido a partir

do fenômeno de pseudoelasticidade (para $T > A_f$) e também consiste em carregar o material acima do limite de escoamento da fase produto. Os dois processos de treinamento pressupõem deformações plásticas consideráveis. Existe um limite para a deformação plástica imposta ao material, assim como um determinado número de ciclos para que o material apresente este comportamento. Estudos experimentais mostram que para uma liga *Nitinol* policristalina, a deformação total imposta ao material deve estar entre 10 e 20% e o número de ciclos para “treinar” o material em torno de 20.

5. APLICAÇÕES

Devido às suas singulares características, as ligas com memória de forma têm instigado uma série de pesquisas em diversos campos do conhecimento, motivando o surgimento de diversas aplicações. As propriedades termomecânicas associadas à boa biocompatibilidade motivam diversas aplicações biomédicas. Machado & Savi (2002, 2003) apresentam revisões sobre aplicações médicas e odontológicas, dentre as quais pode-se destacar dispositivos auto-expansíveis para aplicações cardiovasculares, aparatos cirúrgicos, dispositivos para acelerar a recuperação de ossos, aparelhos ortodônticos e limas endodônticas. A Figura 2 mostra alguns destes dispositivos.

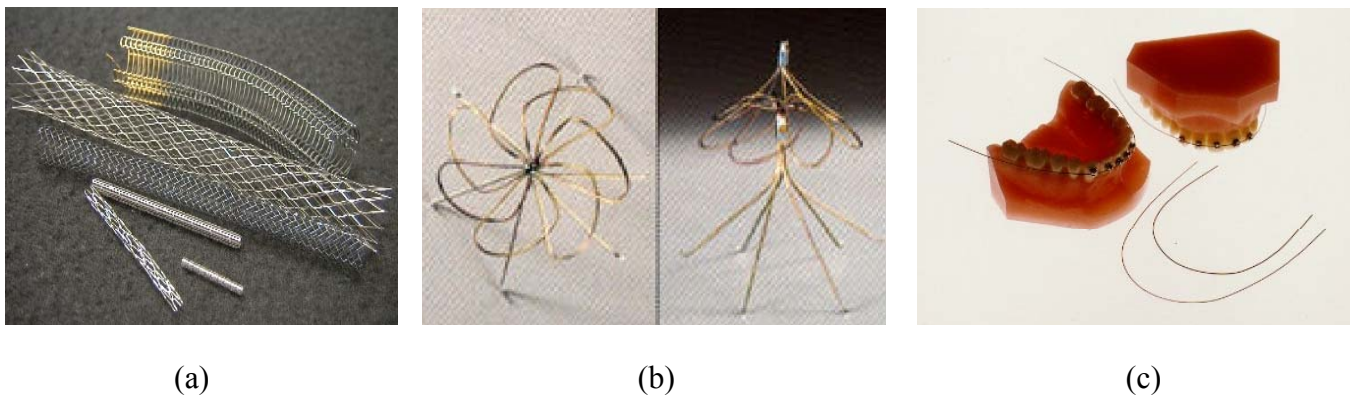


Figura 2 – Dispositivos biomédicos: (a) Stent; (b) Filtro de Simon; (c) Arcos ortodônticos.

As aplicações de engenharia são numerosas (van Humbeeck, 1999; Schetky, 2000). O uso das **SMA**s pode ajudar a resolver importantes problemas na área aeroespacial. Micro-manipuladores e atuadores robóticos têm sido empregados com a finalidade de reproduzir o movimento suave de músculos humanos (Webb *et al.*, 1999).

O uso das SMAs como atuadores para o controle de flambagem e vibrações de estruturas flexíveis é normalmente feito através de fibras de SMAs imersas em matrizes compósitas com a finalidade de alterar as propriedades mecânicas de estruturas (Birman, 1997).

Uma das primeiras aplicações de SMA foi um acoplamento utilizado pela indústria militar aeronáutica americana. Em 1970, construiu-se com sucesso um acoplamento do tipo *Cryofit*, Figura 3(a), em um avião de guerra F-14. A indústria naval também tem utilizado SMAs como atuadores em estruturas flexíveis inteligentes. Lagoudas *et al.* (1999) desenvolveram um protótipo de um hidrofólio flexível tentando associar a dinâmica do movimento da cauda de peixes com o estudo da propulsão hidrodinâmica (Figura 3(b)). As SMAs também encontram aplicações na construção de mãos mecânicas, tentando reproduzir o movimento contínuo dos músculos humanos (Figura 3(c)). Aplicações semelhantes são encontradas em micro-garras para micro-sistemas eletromecânicos (Figura 3(d)).

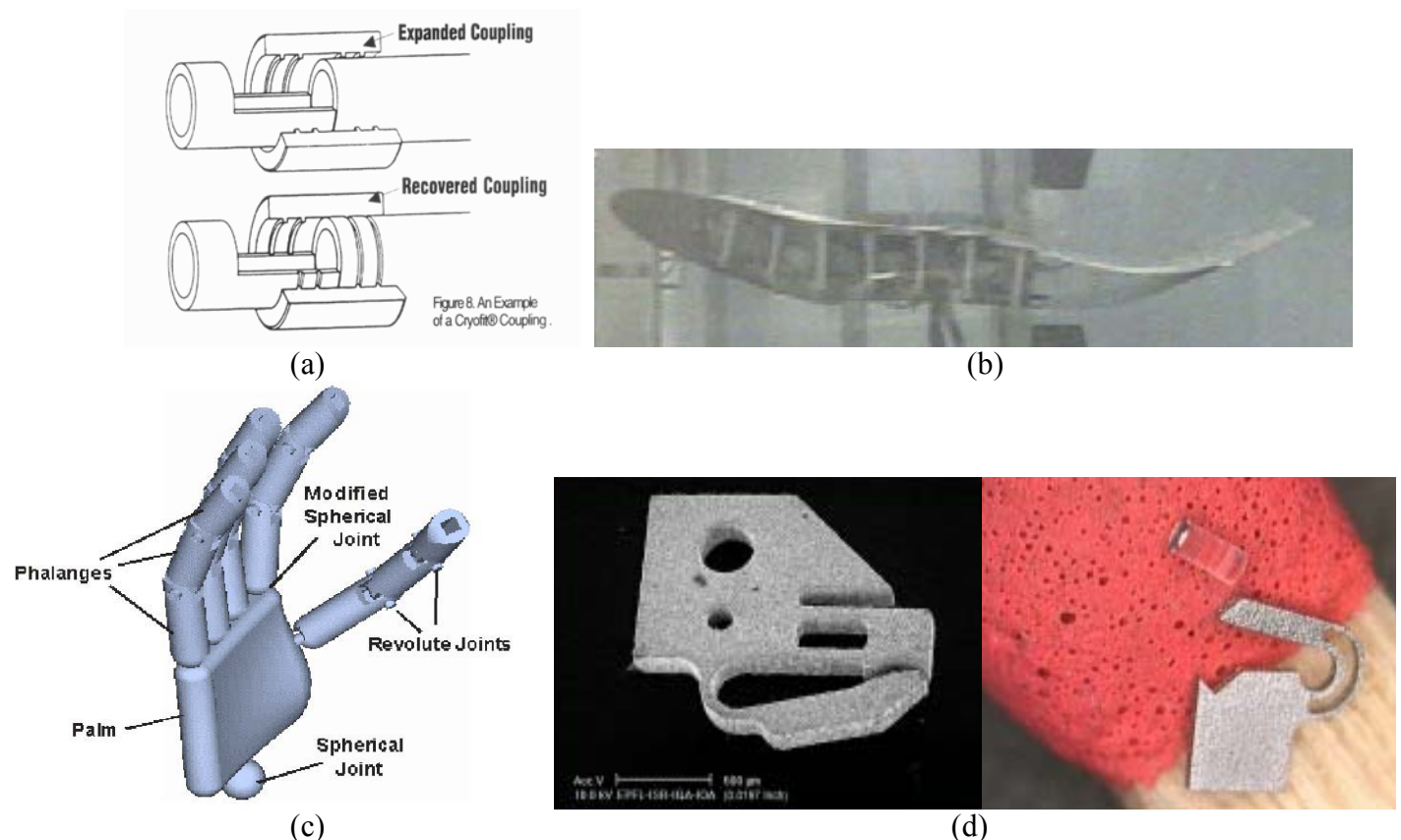


Figura 3 – (a) Acoplamento do tipo *Cryofit*; (b) Hidrofólio; (c) Mão mecânica; (d) Micro-garra.

6. MODELAGEM CONSTITUTIVA

O estado termodinâmico de um material qualquer num dado instante pode ser plenamente definido conhecendo-se os valores de um determinado número de variáveis, denominadas variáveis de estado, que é composto pelas variáveis observáveis e pelas variáveis internas. Para fenômenos dissipativos, é necessário considerar variáveis internas que representem modificações ocorridas no estado termodinâmico do material. Estas variáveis levam em consideração a história do comportamento do material, tal como a deformação plástica ou a fração volumétrica de um microconstituente (Lemaitre & Chaboche, 1990).

Visando apresentar um procedimento para obtenção de equações constitutivas, considere a desigualdade de *Clausius-Duhem*, onde σ_{ij} é o tensor tensão, ε_{ij} é o tensor deformação, ρ é a massa específica, ψ é a *energia livre de Helmholtz*, T é a temperatura, s é a entropia específica, q_i é vetor de fluxo de calor, $g_i = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i}$ e r representa a geração de calor:

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho (\dot{\psi} - \dot{T}s) - q_i g_i + \rho r \geq 0 \quad (1)$$

A energia livre possui a seguinte forma, onde β representa a(s) variável(is) interna(s) que auxilia(m) na descrição do fenômeno: $\psi = \psi(\varepsilon_{ij}, T, \beta)$. Tomando a taxa de variação da energia livre ($\dot{\psi}$) e substituindo na desigualdade de *Clausius-Duhem*, reescreve-se a *segunda lei da termodinâmica*:

$$\left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \dot{\beta} - q_i g_i + \rho r \geq 0 \quad (2)$$

Considerando-se apenas a dissipação intrínseca definem-se as forças termodinâmicas associadas ao processo, onde σ_{ij}^R corresponde à parcela reversível do tensor tensão e B à força termodinâmica associada à(s) variável(is) interna(s) β :

$$\sigma_{ij}^R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad \text{e} \quad B = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \quad (3)$$

Para tratar fenômenos dissipativos, é necessário considerar equações complementares para descrever o problema. Para isso, admite-se o potencial de dissipação ϕ da seguinte forma:

$$\phi = \phi(\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\beta}, q_i) = \phi_I(\dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\beta}) + \phi_T(q_i) \quad (4)$$

onde ϕ_I representa a parcela intrínseca, enquanto ϕ_T corresponde à parcela térmica. Novamente, considerando-se apenas a dissipação intrínseca, definem-se os fluxos termodinâmicos, onde σ_{ij}^I corresponde à parcela irreversível do tensor de tensão:

$$\sigma_{ij}^I = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}; \quad \text{e} \quad B = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\beta}} \quad (5)$$

Desta forma, têm-se as equações constitutivas:

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}; \quad B = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\beta}}; \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (6)$$

Para que a *segunda lei da termodinâmica* seja automaticamente satisfeita, ϕ deve ser positivo, convexo e anular-se na origem. Alternativamente, é possível definir um potencial de dissipação dual (ϕ^*) da seguinte forma: $\phi^* = \phi^*(\sigma_{ij}^I, B, g_i) = \phi_I^*(\sigma_{ij}^I, B) + \phi_T^*(g_i)$. O que permite definir:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \phi^*}{\partial \sigma_{ij}^I} \quad \text{e} \quad \dot{\beta} = \frac{\partial \phi^*}{\partial B} \quad (7)$$

Com isso, tem-se um conjunto de equações que descreve completamente o comportamento do material. As seções seguintes consideram diferentes modelos constitutivos para **SMAs** que podem ser obtidos a partir do formalismo proposto.

7. MODELO POLINOMIAL

O modelo polinomial é baseado na *teoria de Devonshire* e utiliza uma energia livre na forma polinomial. Este modelo foi proposto inicialmente por Falk (1980, 1983, 1990) e é capaz de descrever os fenômenos de pseudoelasticidade e memória de forma. O modelo polinomial trata casos unidimensionais e não considera um potencial de dissipação explícito, além de não utilizar variáveis internas. Desta forma, a energia livre depende apenas das variáveis de estado observáveis (temperatura e deformação).

A energia livre é definida de tal forma que, para altas temperaturas ($T > T_A$), a energia possui apenas um ponto de mínimo correspondente à deformação nula representando a estabilidade da fase austenítica (A); para temperaturas intermediárias ($T_M < T < T_A$) apresenta três pontos de mínimo correspondentes às fases austenítica (A), martensítica não-maclada associada à tração (M^+) e martensítica não-maclada associada à compressão (M^-); para baixas temperaturas ($T < T_M$) há dois pontos de mínimo representando as duas

variantes de martensita (M^+ e M^-) correspondentes a deformações não-nulas. Assim, define-se a seguinte função:

$$\rho \psi(\varepsilon, T) = \frac{a}{2} (T - T_M) \varepsilon^2 - \frac{b}{4} \varepsilon^4 + \frac{b^2}{24 a (T_A - T_M)} \varepsilon^6 \quad (8)$$

onde a e b são constantes positivas do material, T_A é a temperatura acima da qual a austenita é estável e T_M a temperatura abaixo da qual a martensita é estável.

Com isso, define-se a seguinte equação constitutiva para o modelo:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = a (T - T_M) \varepsilon - b \varepsilon^3 + \frac{b^2}{4 a (T_A - T_M)} \varepsilon^5 \quad (9)$$

Para analisar o comportamento previsto pelo modelo polinomial, consideram-se algumas simulações numéricas para uma liga *Nitinol*, com as seguintes propriedades: $a = 1 \times 10^3 \text{ MPa}^0\text{C}$; $b = 40 \times 10^6 \text{ MPa}^0\text{C}$; $T_M = 14^0\text{C}$; $T_A = 40^0\text{C}$. As simulações numéricas dos casos com tensão prescrita utilizam o método de *Newton-Raphson*. A Figura 4 apresenta as curvas energia livre versus deformação. Os pontos extremos das funções definem a estabilidade das diferentes fases do material. Note a existência de máximos globais instáveis, mínimos locais meta-estáveis e mínimos globais estáveis. A Figura 5 mostra as curvas tensão-deformação para o modelo polinomial. Nas Figuras 5(a) e 5(b) estão ilustrados os processos de reorientação da martensita não-maclada ($M^+ \Rightarrow M^-$ e $M^- \Rightarrow M^+$) enquanto a Figura 5(c) mostra o fenômeno da pseudoelasticidade.

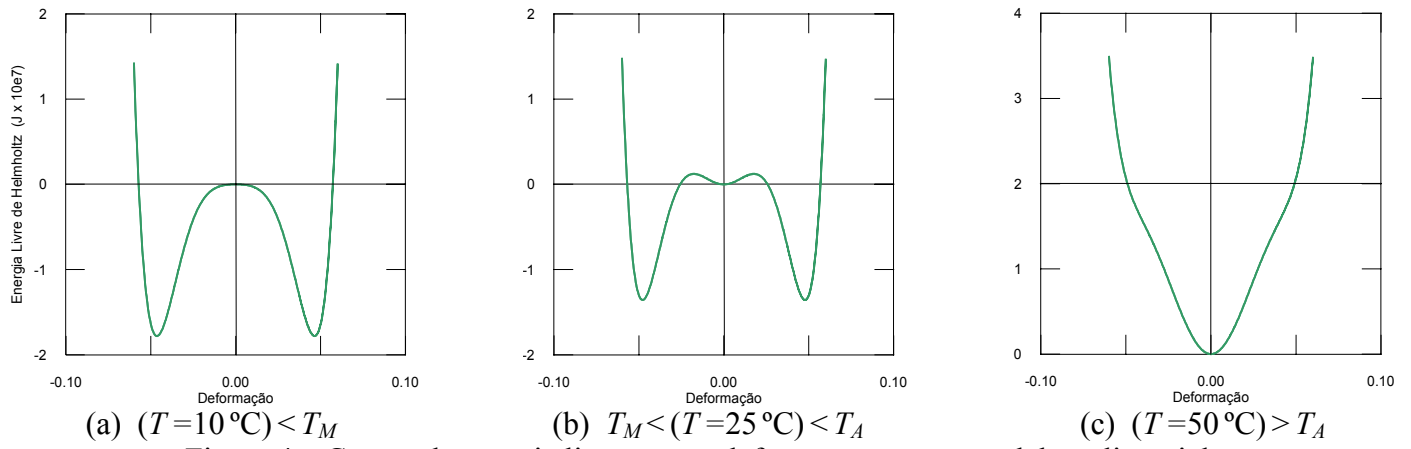


Figura 4 – Curvas de energia livre versus deformação para o modelo polinomial.

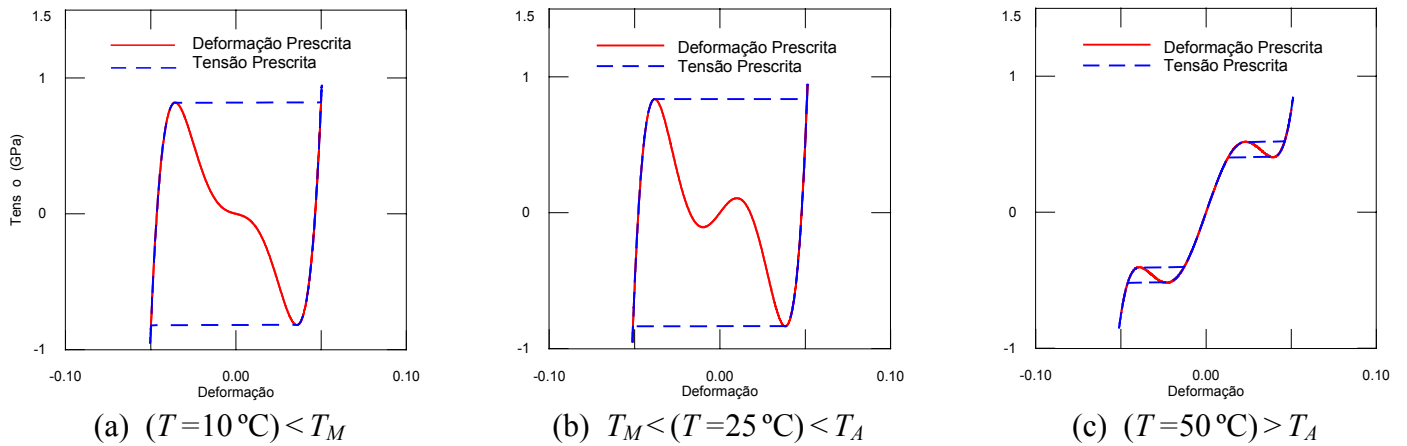


Figura 5 – Curvas tensão-deformação para o modelo polinomial.

Este modelo tem como grande vantagem a sua simplicidade. Ele representa de forma qualitativamente coerente os comportamentos de pseudoelasticidade e memória de forma. O modelo não contempla a fase martensítica não-maclada (M), por isso não existe fase estável para $T < T_M$ livre de tensões.

8. MODELOS COM CINÉTICA DE TRANSFORMAÇÃO DE FASE ASSUMIDA

Os modelos com cinética de transformação assumida consideram, além da deformação, ε , e da temperatura, T , uma variável interna escalar, β , que representa a fração volumétrica da fase martensítica. A relação constitutiva entre a tensão, σ , e as variáveis internas para uma SMA, pode ser expressa da seguinte maneira, na forma de taxas:

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - \alpha\dot{\beta} - \Omega\dot{T} \quad (10)$$

onde E representa o tensor elástico, α o tensor transformação e Ω o tensor termoelástico. Estudos experimentais (Brinson, 1993) revelam que estes coeficientes devem ser expressos em função das variáveis de estado ε , T e β , no entanto, de uma maneira geral, são considerados constantes.

Tendo em vista a natureza não difusiva da transformação martensítica (Tanaka, 1985), a fração volumétrica de martensita é expressa em função dos valores instantâneos de tensão e temperatura: $\beta = \beta(\sigma, T)$. Diversas propostas dessas funções foram propostas por diferentes autores. A seguir, apresentam-se algumas destas formas.

8.1. MODELO DE TANAKA, BOYD & LAGOUDAS E DE LIANG & ROGERS

O modelo de Tanaka e co-autores foi originalmente desenvolvido para descrever problemas tridimensionais envolvendo o fenômeno de memória de forma. No entanto, sua implementação ficou restrita ao caso unidimensional (Tanaka & Nagaki, 1982; Tanaka, 1985). As transformações de fase são descritas através de funções exponenciais. Assim, para a transformação austenita \Rightarrow martensita, admite-se a seguinte função:

$$\beta = 1 - \exp[-a_M (M_S - T) - b_M \sigma] + \beta_0 \quad (11)$$

onde a_M e b_M são constantes positivas do material enquanto β_0 representa a fração volumétrica de martensita quando se inicia a transformação. O limite que determina o início da transformação é definido por $\sigma_{M_S} \geq a_M / b_M (T - M_S)$. A transformação inversa é descrita por outra função exponencial:

$$\beta = \beta_0 \exp[-a_A (T - A_s) - b_A \sigma] \quad (12)$$

onde a_A e b_A são constantes do material, enquanto β_0 representa a fração volumétrica de martensita quando se inicia a transformação. Esta equação se aplica para valores de tensão tais que $\sigma_{A_s} \leq a_A / b_A (T - A_s)$. Artificio análogo ao da transformação direta é empregado na obtenção do limite final da transformação inversa.

O modelo de Boyd & Lagoudas (1994) apresenta modificações em relação ao modelo de Tanaka que permitiram o desenvolvimento de uma teoria tridimensional. As relações utilizadas para descrever a cinética de transformação são semelhantes às empregadas no modelo de Tanaka, considerando que as constantes a_M , b_M , a_A e b_A são definidas de forma diferente (Brinson & Huang, 1995).

O modelo de Liang & Rogers (1990) é unidimensional e considera uma lei de transformação envolvendo cosenos. Esse modelo foi aplicado em estudos envolvendo controle acústico de vibrações (Rogers *et al.*, 1991; Anders *et al.*, 1992) e os resultados são coerentes com dados experimentais. Liang & Rogers (1991) desenvolvem um modelo tridimensional onde sugerem que as transformações de fase são governadas pela energia de distorção.

8.2. MODELO DE BRINSON

O modelo de Brinson apresenta mais uma proposta de modificação na cinética de transformação de fase (Brinson, 1993). Este modelo também considera expressões cosenoidais, introduzindo uma inovação que é separar a variável interna, β , em duas novas variáveis utilizadas para representar de forma distinta as frações martensíticas induzidas por temperatura, β_T , e por tensão, β_S , de tal forma que: $\beta = \beta_T + \beta_S$. A partir da consideração destas novas variáveis, a equação constitutiva é escrita em função de β_S ao invés de β . Brinson (1993) estabelece ainda uma relação linear envolvendo os módulos de elasticidade do material correspondentes às fases austenítica, E_A , e martensítica, E_M , tal que: $E(\beta) = E_A + \beta(E_M - E_A)$.

A cinética de transformação austenita \Rightarrow martensita para $T > M_S$ e $\sigma_S^{CRIT} + C_M(T - M_S) < \sigma < \sigma_f^{CRIT} + C_M(T - M_S)$ é expressa por:

$$\beta_S = \frac{1-\beta_{S_0}}{2} \cos \left\{ \frac{\pi}{\sigma_S^{CRIT} - \sigma_f^{CRIT}} \left[\sigma - \sigma_f^{CRIT} - C_M (T - M_S) \right] \right\} + \frac{1+\beta_{S_0}}{2}; \quad \beta_T = \beta_{T_0} - \frac{\beta_{T_0}}{1-\beta_{S_0}} (\beta_S - \beta_{S_0}) \quad (13)$$

enquanto para $T < M_S$ e $\sigma_S^{CRIT} < \sigma < \sigma_f^{CRIT}$:

$$\beta_S = \frac{1-\beta_{S_0}}{2} \cos \left[\frac{\pi}{\sigma_S^{CRIT} - \sigma_f^{CRIT}} (\sigma - \sigma_f^{CRIT}) \right] + \frac{1+\beta_{S_0}}{2}; \quad \beta_T = \beta_{T_0} - \frac{\beta_{T_0}}{1-\beta_{S_0}} (\beta_S - \beta_{S_0}) + \Delta_T \quad (14)$$

onde

$$\Delta_T = \begin{cases} \frac{1-\beta_{T_0}}{2} \left\{ \cos \left[a_M (T - M_f) \right] + 1 \right\}, & \text{se } M_f < T < M_S \text{ e } T < T_0 \\ 0, & \text{demais casos} \end{cases} \quad (15)$$

A transformação inversa ocorre para $T > A_S$ e $C_A (T - A_f) < \sigma < C_A (T - A_S)$ sendo definida por:

$$\beta_S = \frac{\beta_{S_0}}{2} \left\{ \cos \left[a_A \left(T - A_S - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + 1 \right\}; \quad \beta_T = \frac{\beta_{T_0}}{2} \left\{ \cos \left[a_A \left(T - A_S - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + 1 \right\} \quad (16)$$

de modo que a_M e a_A são similares às constantes definidas no modelo de Liang & Rogers, enquanto β_{S_0} e β_{T_0} representam as frações volumétricas de martensita induzidas por tensão e por temperatura, respectivamente, quando se dá início a transformação.

8.3. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção, apresentam-se algumas simulações numéricas dos modelos discutidos. Considera-se uma liga Nitinol cujas propriedades termomecânicas estão apresentadas em Paiva & Savi (1999). A Figura 6 mostra uma comparação entre as curvas tensão-deformação previstas pelos modelos em questão, para diferentes

temperaturas. Vê-se que todos os modelos são capazes de descrever os fenômenos de memória de forma e pseudoelasticidade, no entanto, algumas diferenças devem ser ressaltadas. A primeira delas está relacionada aos limites inicial e final da tensão de transformação. Somente o modelo de Brinson considera que a tensão crítica para a conversão da martensita maclada é constante, sendo uma função linear da temperatura quando $T > M_S$. Uma segunda diferença entre os modelos reside na definição do módulo de elasticidade como uma função linear da fração martensítica. Mais uma vez, apenas o modelo de Brinson adota essa consideração o que, de fato, poderia ter sido feito em todos os modelos. A diferença que, possivelmente, é a principal distinção entre os modelos, é a inovação introduzida por Brinson separando a variável interna, β , em duas novas variáveis (β_T e β_S), o que implica na inclusão de mais uma variante da fase martensítica. A Figura 6(a) mostra o fenômeno pseudoelástico. A Figura 6(b) mostra a pseudolasticidade parcial, onde a transformação de fase inversa não é totalmente concluída. Na Figura 6(c) tem-se o fenômeno de transformação de fase martensítica associada à memória de forma em que a fase matriz é composta por martensita maclada. O modelo de Brinson é o único que possui uma fase estável quando livre de tensões. Os demais modelos representam apenas a transformação da parcela austenítica, assinalando uma deformação inicial como se essa tivesse sido ocasionada por imposição de um campo de tensões.

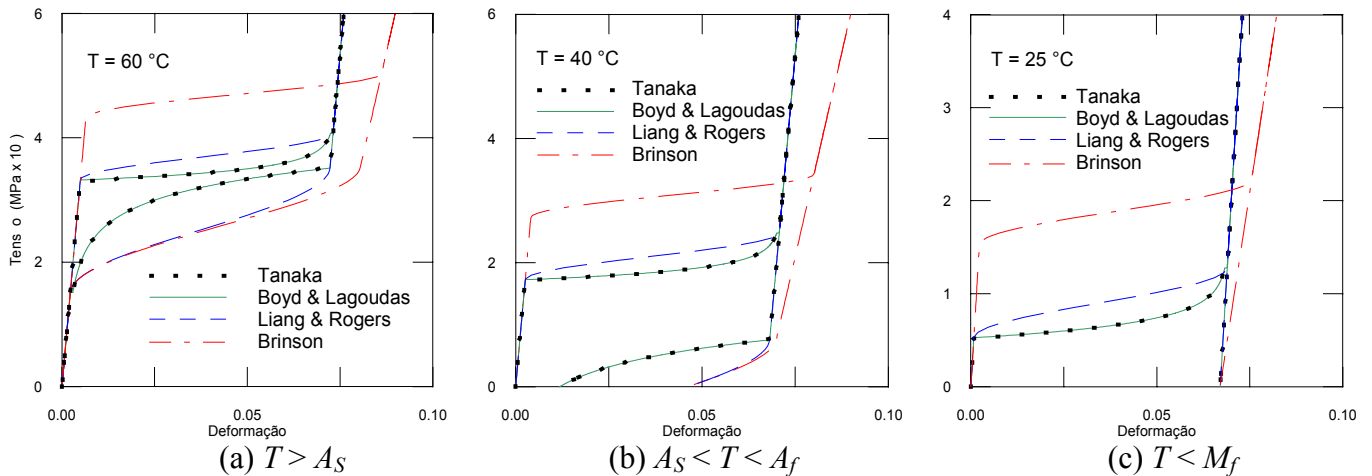


Figura 6 - Curvas Tensão-Deformação para Modelos com Cinética de Transformação.

A Figura 7(b) mostra a curva tensão-deformação-temperatura para o modelo Brinson de uma liga submetida a um carregamento termomecânico apresentado na Figura 7(a). Nesta figura, é possível identificar o efeito de memória de forma, além da reprodução de sublaços internos devidos a transformações de fase incompletas. Resultados similares são obtidos para os demais modelos.

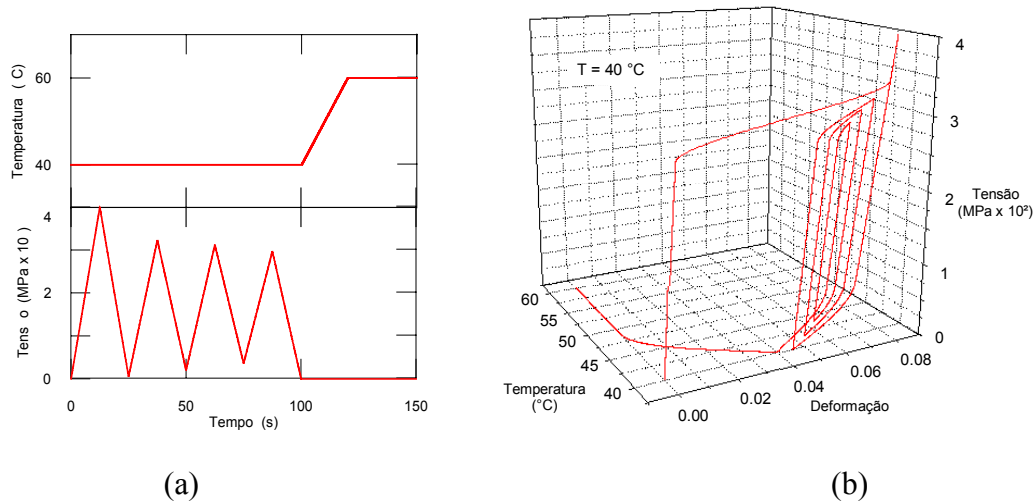


Figura 7 – Efeito de Memória de forma e sublaços internos para o modelo de Brinson.

(a) Carregamento termomecânico; (b) Curva Tensão-Deformação-Temperatura.

O efeito de transformação de fase devido à variação de temperatura é tratado a seguir considerando o modelo de Brinson (Figura 8). O resultado mostra também sublaços internos devidos a transformações de fase incompletas, mostrando a habilidade do modelo de representar este comportamento. Os demais modelos apresentam problemas na descrição deste fenômeno tendo em vista a não existência da fração martensítica induzida por temperatura, β_T .

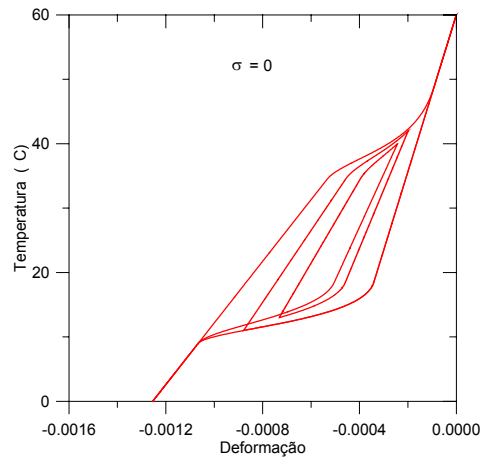


Figura 8 – Transformação de fase devido à variação de temperatura para o modelo de Brinson.

9. MODELO COM RESTRIÇÕES INTERNAS

O modelo de Fremond (1987, 1996) é um modelo tridimensional que descreve a resposta termomecânica de **SMA**s com o auxílio de variáveis internas que representam as frações volumétricas de duas variantes martensíticas (M^+ e M^-) e uma fase austenítica (A). Estas fases devem satisfazer restrições relativas à coexistência entre elas. O modelo original de Fremond consegue descrever de forma qualitativamente coerente os fenômenos de pseudoelasticidade e memória de forma.

O modelo original de Fremond foi alterado por Savi *et al.* (2002) para contemplar a inclusão de uma nova variante associada à martensita maclada (*twinned*) e a consideração de módulos elásticos distintos para as diferentes fases do material. Além disso, o novo modelo inclui os fenômenos da expansão térmica e da plasticidade, incorporando o acoplamento entre a transformação de fase e a plasticidade. Isto permite a modelagem do fenômeno de memória de forma reversível. Baêta Neves *et al.* (2003) considera o alargamento horizontal do laço de histerese visando facilitar ajustes com curvas experimentais.

A modelagem constitutiva admite as seguintes variáveis de estado: deformação, ε , temperatura, T , frações volumétricas das variantes martensíticas, β_1 e β_2 , que estão associadas às variantes martensíticas não-macladas (*detwinned*), induzidas por tensão de tração e compressão (M^+ e M^- , respectivamente), β_3 , que está associada à fase austenítica (A) e a quarta fase, que está associada à martensita termoelástica (M), ou martensita maclada

(*twinned*), cuja fração volumétrica é β_4 . O fenômeno da plasticidade é descrito pelas seguintes variáveis: ε^p é a deformação plástica, γ é a variável associada ao endurecimento isotrópico e μ é a variável associada ao endurecimento cinemático. Note que o efeito do endurecimento é representado por uma combinação de efeitos associados à translação e expansão da superfície de escoamento do material, respectivamente endurecimentos cinemático e isotrópico. Admite-se a decomposição aditiva, e a deformação total, ε , pode ser dividida em uma parcela recuperável, relativa à transformação de fase, ε^{SMA} , normalmente considerada na descrição do comportamento das **SMA**s e uma parcela plástica, ε^p : $\varepsilon = \varepsilon^{SMA} + \varepsilon^p$.

Desta forma, consideram-se funcionais de energia livre para cada uma das fases do material. A energia livre total da mistura pode ser obtida por um somatório, da seguinte forma:

$$\rho \hat{\psi}(\varepsilon, T, \beta_i, \varepsilon^p, \gamma, \mu) = \rho \sum_{i=1}^4 \beta_i \psi_i(\varepsilon, T, \varepsilon^p, \gamma, \mu) + \hat{\mathbf{J}}(\beta_i) \quad (17)$$

onde as frações volumétricas devem satisfazer restrições relativas à coexistência de quatro fases distintas do material: $0 \leq \beta_i \leq 1$ ($i=1,2,3,4$); $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1$. De posse destas restrições é possível eliminar uma das variáveis, por exemplo β_4 , o que permite reescrever a energia livre:

$$\begin{aligned} \rho \psi = & \beta_1 \left[-\alpha (\varepsilon - \varepsilon^p) - \frac{L_M}{T_M} (T - T_M) \right] + \beta_2 \left[\alpha (\varepsilon - \varepsilon^p) - \frac{L_M}{T_M} (T - T_M) \right] + \beta_3 \left[\frac{1}{2} (E_A - E_M) (\varepsilon - \varepsilon^p)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{(L_A + L_M)}{T_M} (T - T_M) - (\Omega_A - \Omega_M) (T - T_0) (\varepsilon - \varepsilon^p) + \frac{1}{2} (K_A - K_M) \gamma^2 + \left(\frac{1}{2H_A} - \frac{1}{2H_M} \right) \mu^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} E_M (\varepsilon - \varepsilon^p)^2 + \frac{L_M}{T_M} (T - T_M) - \Omega_M (T - T_0) (\varepsilon - \varepsilon^p) + \frac{1}{2} K_M \gamma^2 + \frac{1}{2H_M} \mu^2 + \mathbf{J}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \end{aligned} \quad (18)$$

onde α , $L_M=L_M(T)$ e $L_A=L_A(T)$ são parâmetros do material que descrevem as transformações martensíticas; E_M e E_A representam os módulos de elasticidade para as fases martensítica e austenítica; Ω_M e Ω_A representam os coeficientes de expansão térmica para as fases martensítica e austenítica; K_M e K_A são os módulos de plasticidade para as fases martensítica e austenítica, enquanto H_M e H_A são os módulos de endurecimento cinemático para as fases martensítica e austenítica, respectivamente; T_M é a temperatura de início de formação da martensita, enquanto T_0 é a temperatura de referência. \mathbf{J} representa a função indicatriz do conjunto π , cujo domínio é dado pelo tetraedro da Figura 9.

$$\pi = \left\{ \beta_i \in \Re \left| \begin{array}{l} 0 \leq \beta_i \leq 1 \quad (i=1, 2, 3); \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \leq 1; \\ \beta_1 = \beta_2 = 0 \text{ se } \sigma = 0 \text{ e } \beta_1^S = \beta_2^S = 0 \end{array} \right. \right\} \quad (19)$$

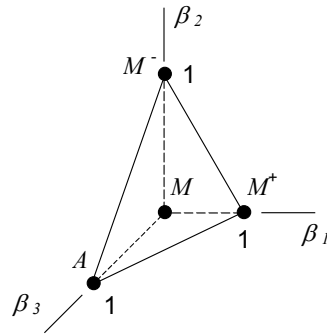


Figura 9 – Tetraedro de restrições.

β_1^S e β_2^S são, respectivamente, os valores de β_1 e β_2 quando se inicia o processo de transformação de fase. Esta parte da restrição é incluída para garantir que, na ausência de tensões, as variantes martensíticas não-macladas (*detwinned*), M^+ e M^- , não existem.

As equações de estado são obtidas a partir da energia livre de Helmholtz:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = E(\varepsilon - \varepsilon^p) + \alpha(\beta_2 - \beta_1) - \Omega(T - T_0) \quad (20)$$

$$B_1 \in -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \beta_1} = \alpha(\varepsilon - \varepsilon^p) + \frac{L_M}{T_M}(T - T_M) - \partial_1 J \quad (21)$$

$$B_2 \in -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \beta_2} = -\alpha(\varepsilon - \varepsilon^p) + \frac{L_M}{T_M}(T - T_M) - \partial_2 J \quad (22)$$

$$B_3 \in -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \beta_3} = -\frac{1}{2}(E_A - E_M)(\varepsilon - \varepsilon^p)^2 + \frac{L_A + L_M}{T_M}(T - T_M) + \\ + (\Omega_A - \Omega_M)(T - T_0)(\varepsilon - \varepsilon^p) - \frac{1}{2}(K_A - K_M)\gamma^2 - \left(\frac{1}{2H_A} - \frac{1}{2H_M} \right) \mu^2 - \partial_3 J \quad (23)$$

$$X = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^p} = E(\varepsilon - \varepsilon^p) + \alpha(\beta_2 - \beta_1) - \Omega(T - T_0) = \sigma; \quad Y = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} = -K\gamma; \quad Z = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = -\frac{1}{H}\mu \quad (24)$$

onde B_i são as forças termodinâmicas relacionadas com as transformações de fase do material; σ representa a tensão uniaxial; X , Y e Z compõem o conjunto de forças termodinâmicas relacionadas com o fenômeno da plasticidade e ∂_i são as subdiferenciais da função indicatriz \mathbf{J} em relação às variáveis β_i (Rockafellar, 1970).

Complementando, as seguintes definições foram consideradas:

$$E = E_M - \beta_3(E_M - E_A); \quad \Omega = \Omega_M - \beta_3(\Omega_M - \Omega_A); \quad K = K_M - \beta_3(K_M - K_A); \quad \frac{1}{H} = \frac{1}{H_M} - \beta_3 \left(\frac{1}{H_M} - \frac{1}{H_A} \right) \quad (25)$$

Admitindo-se o acoplamento entre plasticidade e transformação de fase, assume-se a seguinte formulação para o potencial dual de dissipação:

$$\phi^* = \frac{1}{2\eta} \left[(B_1 + \eta_{ci}Y + \eta_{ck}Z)^2 + (B_2 + \eta_{ci}Y + \eta_{ck}Z)^2 + (B_3 - \eta_{ci}Y - \eta_{ck}Z)^2 \right] + I_f \quad (26)$$

onde I_f é a função indicatriz relativa à superfície de escoamento, definida pela função:

$$f(X, Y, Z) = |X + HZ| - (\sigma_Y - Y) \quad \text{ou} \quad f(\sigma, \mu, \gamma) = |\sigma - \mu| - (\sigma_Y + K\gamma) \quad (27)$$

O parâmetro η está associado à dissipação interna do material, enquanto η_{ci} e η_{ck} são parâmetros relacionados com o acoplamento plástico-transformação de fase. O parâmetro η_{ci} está associado ao efeito do endurecimento isotrópico e o parâmetro η_{ck} está associado ao efeito do endurecimento cinemático. Desta forma, são obtidas as seguintes equações complementares:

$$\dot{\beta}_1 \in \partial_{B_1} \phi^* = \frac{B_1}{\eta} + \frac{\eta_{ci}}{\eta} Y + \frac{\eta_{ck}}{\eta} Z = \frac{B_1}{\eta} - \frac{\eta_{ci}}{\eta} K\gamma - \frac{\eta_{ck}}{\eta} \frac{\mu}{H} \quad (28)$$

$$\dot{\beta}_2 \in \partial_{B_2} \phi^* = \frac{B_2}{\eta} + \frac{\eta_{ci}}{\eta} Y + \frac{\eta_{ck}}{\eta} Z = \frac{B_2}{\eta} - \frac{\eta_{ci}}{\eta} K\gamma - \frac{\eta_{ck}}{\eta} \frac{\mu}{H} \quad (29)$$

$$\dot{\beta}_3 \in \partial_{B_3} \phi^* = \frac{B_3}{\eta} - \frac{\eta_{ci}}{\eta} Y - \frac{\eta_{ck}}{\eta} Z = \frac{B_3}{\eta} + \frac{\eta_{ci}}{\eta} K\gamma + \frac{\eta_{ck}}{\eta} \frac{\mu}{H} \quad (30)$$

$$\dot{\varepsilon}^p \in \partial_X \phi^* = \lambda \text{sign}(X + HZ) = \lambda \text{sign}(\sigma - \mu) \quad (31)$$

$$\dot{\gamma} \in \partial_Y \phi^* = \lambda + \eta_{ci}(\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 - \dot{\beta}_3) = |\dot{\varepsilon}^p| + \eta_{ci}(\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 - \dot{\beta}_3) \quad (32)$$

$$\dot{\mu} \in \partial_Z \phi^* = \lambda H \text{sign}(X + HZ) + \eta_{ck}(\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 - \dot{\beta}_3) = H\dot{\varepsilon}^p + \eta_{ck}(\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 - \dot{\beta}_3) \quad (33)$$

onde λ são os multiplicadores de Lagrange. A natureza irreversível do fluxo plástico é representada através das condições de *Kuhn-Tucker*:

$$\lambda \geq 0; f(\sigma, \gamma, \mu) \leq 0; \lambda f(\sigma, \gamma, \mu) = 0; \lambda \dot{f}(\sigma, \gamma, \mu) = 0 \text{ se } f(\sigma, \gamma, \mu) = 0 \quad (34)$$

Os parâmetros de transformação de fase $L_M = L_M(T)$ e $L_A = L_A(T)$ são obtidos assumindo-se $\dot{\beta}_1 = 0$ e $\varepsilon = \varepsilon_R$ em uma temperatura crítica, T_C , abaixo da qual não existe mais variação da deformação residual com a temperatura. Esta temperatura crítica limita o deslocamento do laço de histerese para $T < T_C$.

Para lidar com as não-linearidades existentes na formulação do problema, a solução do conjunto de equações constitutivas emprega a técnica de partição do operador (Ortiz *et al.*, 1983) associada a um algoritmo de projeção ortogonal (Savi & Braga, 1993). Inicialmente, o procedimento isola as subdiferenciais e utiliza o

método de *Euler* implícito para calcular as frações volumétricas. Caso os valores calculados não atendam às restrições representadas pelo tetraedro da Figura 9, as projeções ortogonais, que representam as subdiferenciais da função indicatriz \mathbf{J} , se encarregam de projetar as variáveis até o ponto mais próximo da superfície do tetraedro, garantindo que as frações volumétricas calculadas obedecem às restrições internas impostas pelo modelo. O comportamento elasto-plástico é simulado utilizando-se o algoritmo de mapeamento de retorno, proposto por Simo & Taylor (1986).

9.3. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Considere uma amostra de SMA com propriedades típicas de uma liga de Ni-Ti apresentadas em Savi *et al.* (2002). A pseudoelasticidade é analisada na Figura 10, onde aplica-se um carregamento isotérmico, para uma temperatura $T > T_A$ de 333 K (60°C). A curva tensão-deformação contempla o fenômeno da pseudoelasticidade, onde observa-se a distinção entre os módulos de elasticidade das fases austenítica e martensítica.

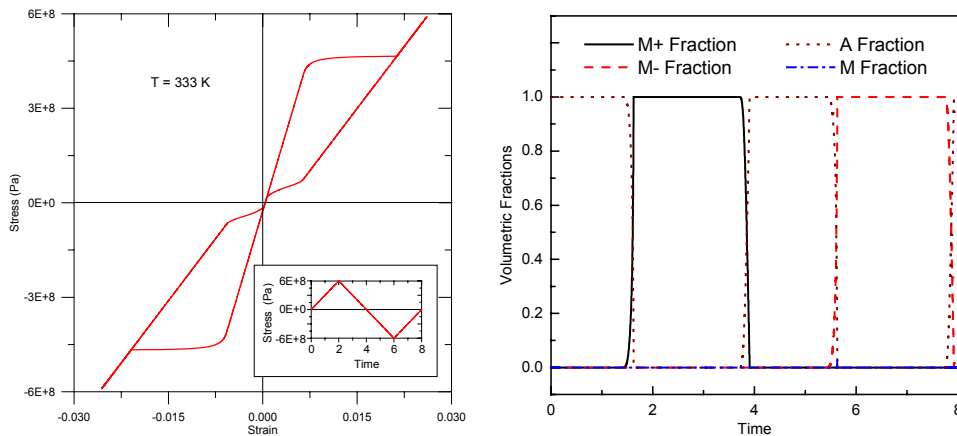


Figura 10 – Pseudoelasticidade ($T = 333\text{K} > T_A$).

A seguir considera-se o efeito de memória de forma. Para um processo de carregamento e descarregamento de tensão prescrita, conforme apresentado na Figura 11, desenvolvido em uma temperatura constante $T = 263\text{ K}$ (-10°C) $< T_M$ onde a fase martensítica é estável, a amostra admite uma deformação residual que pode ser eliminada com um subsequente carregamento térmico. A curva tensão-deformação mostra como o

carregamento térmico recupera a deformação residual produzida após o carregamento mecânico. A curva de evolução das frações volumétricas mostra que, inicialmente, para um estado livre de tensões, a amostra se encontra na fase martensítica estável (M), mostrando que existe uma fase estável para baixas temperaturas e livre de tensão.

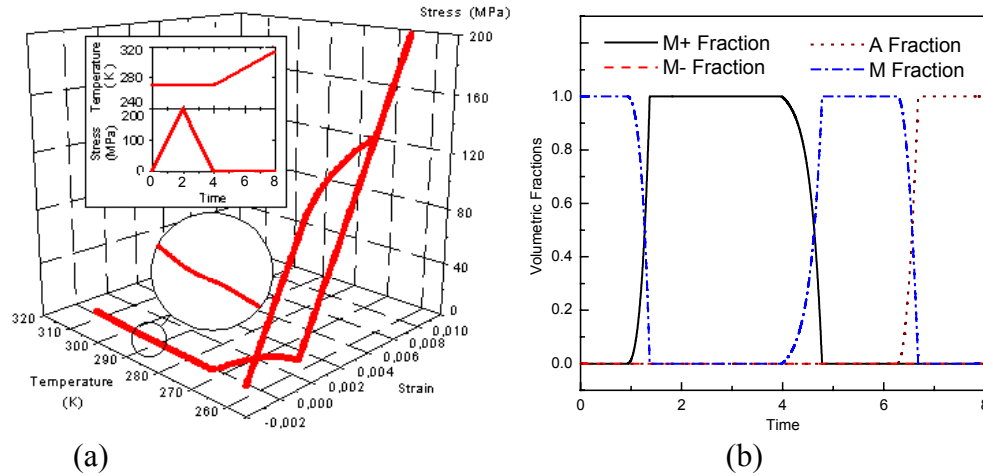


Figura 11 - Efeito de Memória de Forma ($T = 263K < T_M$).

O comportamento associado à transformação de fase devida à variação de temperatura é analisado considerando-se um carregamento térmico, livre de tensões, conforme a Figura 12. A curva deformação-temperatura contempla o fenômeno. A temperatura T_M define a posição para o aparecimento do laço de histerese, característico das transformações de fase. A evolução das frações volumétricas mostra a conversão entre a austenita (A) e a martensita maclada (M) e vice-versa.

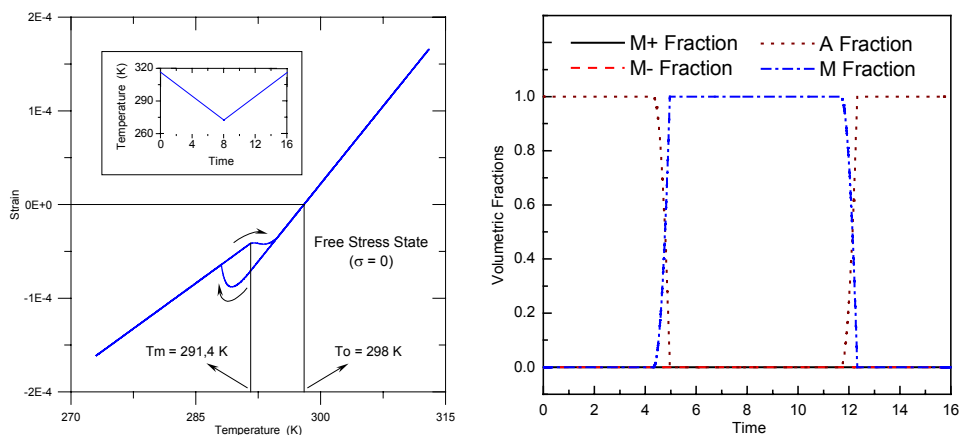


Figura 12 – Transformação de fase devido à variação de temperatura ($T_M = 291,4 K$).

Além destes resultados vale destacar que o modelo com restrições internas apresentado permite descrever o fenômeno de memória de forma reversível, o que é uma de suas importantes características.

12. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma discussão sobre as ligas com memória de forma, apontando alguns aspectos relacionados a seus comportamentos termomecânicos e suas aplicações. De uma maneira geral, observa-se que a modelagem destas ligas possui duas abordagens distintas: microscópica e macroscópica. A abordagem macroscópica possui uma preocupação com os aspectos fenomenológicos, e a seguinte classificação pode ser proposta: modelos polinomiais, modelos com cinética de transformação de fase assumida, modelos com restrições internas e modelos baseados na plasticidade. Este trabalho apresenta uma revisão sobre estes modelos, mostrando suas capacidades e limitações.

13. AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer o suporte do CNPq e da CAPES. Além disso, vale um agradecimento especial a *Alessandro P. Baêta Neves* pela sua importante participação no desenvolvimento do modelo constitutivo com restrições internas apresentado neste artigo e ao *Prof. Arthur M.B. Braga* (PUC/Rio) que vem participando da elaboração da nova versão desse mesmo modelo.

14. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abeyaratne, R., Kim, S.J. & Knowles, J.K., “A One-Dimensional Continuum Model for Shape Memory Alloys”, *International Journal of Solids and Structures*, v.31, pp. 2229-2249, 1994.
- Anders, W.S., Rogers, C.A. & Fuller, C.R., “Vibration and Low-frequency Acoustic Analysis of piecewise-activated Adaptive Composite Panels”, *Journal of Composite Materials*, v.26, pp. 103-120, 1992.
- Auricchio, F. & Lubliner, J., “A Uniaxial Model for Shape Memory Alloys”, *International Journal of Solids and Structures*, v.34, n. 27, pp. 3601-3618, 1997.

- Auricchio, F. & Sacco E., “A One-Dimensional Model for Superelastic Shape Memory Alloys with Different Elastic properties Between Austenite and Martensite”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v.32, n.6, pp.1101-1114, 1997.
- Auricchio, F., Taylor, R.L. & Lubliner, J., “Shape-Memory Alloys: Macromodeling and Numerical Simulations of the Superelastic Behavior”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.146, n.3-4, pp. 281-312, 1997.
- Baêta Neves, A.P., Savi, M.A. & Pacheco, P.M.C.L., “Horizontal Enlargement of the Stress-Strain Hysteresis Loop on a Thermo-Plastic-Phase Transformation Coupled Model for Shape Memory Alloys”, Submetido ao *COBEM 2003 - 17th International Congress of Mechanical Engineering*, 2003.
- Bertran, A., “Thermomechanical Constitutive Equations for the Description of Shape Memory Effects in Alloys”, *Nuclear Engineering and Design*, v.74, pp.173-182, 1982.
- Birman, V., “Review of Mechanics of Shape Memory Alloys Structures”, *Applied Mechanics Review*, v.50, n.11, pp. 629-645, 1997.
- Boyd, J.G. & Lagoudas, D.C., “Constitutive Model for Simultaneous Transformation and Reorientation in Shape Memory Alloys”, *Mechanics of Phase Transformation and Shape Memory Alloys*, New York, pp.159-177, 1994.
- Boyd, J.G. & Lagoudas, D.C., “Thermodynamic Constitutive Model for the Shape Memory Materials. Part I: The Monolithic Shape memory Alloys”, *International Journal of Plasticity*, v.12, n.6, pp.805-842, 1996.
- Brinson, L.C. & Huang, M.S., “Simplifications and Comparisons of Shape Memory Alloy Constitutive Models”, *Journal of Intelligent Materials Systems and Structures*, v.7, pp. 108-114, 1995.
- Brinson, L.C., “One Dimensional Constitutive Behavior of Shape Memory Alloys: Themomechanical Derivation with Non Constant Material Functions and Redefined Martensite Internal Variable”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, n. 4, pp. 229-242, 1993.
- Eringen, A.C., “*Mechanics of Continua*”, John Wiley & Sons, New York, 1967.
- Falk, F. & Konopka, P., “Three-Dimensional Landau Theory Describing the Martensitic Transformation of Shape Memory Alloys”, *Journal de Physique*, n.2, pp. 61-77, 1990.
- Falk, F., “One-Dimensional Model of Shape Memory Alloys”, *Arch. Mech.*, n.35, pp. 63-84, 1983.
- Falk, F., “Model Free-Energy, Mechanics and Thermodynamics of Shape Memory Alloys”, *ACTA Metallurgica*, v.28, pp. 1773-1780, 1980.
- Fremond, M., “Matériaux à Mémoire de Forme”, *C.R. Acad. Sc. Paris, Tome 304, s. II*, n. 7, pp. 239-244, 1987.
- Fremond, M., “*Shape Memory Alloy: A Thermomechanical Macroscopic Theory*”, CISM Courses and Lectures, New York, n.351, pp. 3-68, 1996.
- Funakubo, H., “*Shape Memory Alloys*”, Gordon & Bleach, New York, 1987.

- Govindjee S. & Kasper, E.P., “A Shape Memory Alloy Model for Uranium-Niobium Accounting for Plasticity”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v.8, pp.815-826, 1997.
- Ivshin, Y. & Pence, T.J., “A Constitutive Model for Hysteretic Phase Transition Behavior”, *International Journal of Engineering Science*, n. 32, pp. 681-704, 1994a.
- Ivshin, Y. & Pence, T.J., “A Thermomechanical Model for a One Variant Shape Memory Material”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, n. 5, pp. 455-473, 1994b.
- Leclercq, S., Bourbon, G. & Lexcellent, C., “Plasticity Like Model of Martensite Phase Transition in Shape Memory Alloys”, *Journal de Physique IV*, v.5, pp. 513-518, 1995.
- Lemaitre, J. & Chaboche, J.L., “*Mechanics of Solid Materials*”, Cambridge University Press, 1990.
- Liang, C. & Rogers, C.A., “Multi-Dimensional Constitutive Relations of Shape Memory Alloys”, *Structural Dynamics and Materials Conference - Part I*, pp. 178-185, 1991.
- Liang, C. & Rogers, C.A., “One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, n. 1, pp. 207-234, 1990.
- Machado, L.G. & Savi, M.A., “Aplicações Odontológicas das Ligas com Memória de Forma”, *Revista Brasileira de Odontologia*, v.59, n.5, pp.302-306, 2002.
- Machado, L.G. & Savi, M.A., “Medical Applications of Shape Memory Alloys”, *Brazilian Journal of Medical and Biological Research*, v.36, n.6, pp.683-691, 2003.
- Miller, D.A. & Lagoudas, D.C., “Thermo-mechanical characterization of NiTiCu and NiTi SMA actuators: influence of plastic strains”, *Smart Materials & Structures*, v.9, pp. 640-652, 2000.
- Ortiz, M., Pinsky, P.M., Taylor, R.L., “Operator split methods for the numerical solution of the elastoplastic dynamic problem”, *Computer Methods of Applied Mechanics and Engineering*, v.39, pp.137-157, 1983.
- Paiva, A. & Savi, M.A., “Sobre os Modelos Constitutivos com Cinética de Transformação Assumida para Ligas com Memória de Forma”, *COBEM 99 - XV Congresso Brasileiro de Eng. Mecânica*, 1999.
- Rockafellar, R.T., “*Convex Analysis*”, Princeton Press, New Jersey, 1970.
- Rogers, C. A., “Intelligent Materials”, *Scientific American*, September, pp.122-127, 1995.
- Rogers, C.A., Liang, C. & Fuller, C.R., “Modeling of Shape Memory Alloy Hybrid Composites for Structural Acoustic Control”, *Journal of the Acoustical Society of America*, n. 89, pp. 210-220, 1991.
- Savi, M. A., Paiva, A., Baêta-Neves, A. P. & Pacheco, P. M. C. L., “Phenomenological Modeling and Numerical Simulation of Shape Memory Alloys: A Thermo-Plastic-Phase Transformation Coupled Model”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v.13, n.5, pp.261-273, 2002.
- Savi, M.A., Braga, A.M.B., “Chaotic response of a shape memory oscillator with internal constraints”, *COBEM 93 - 12th Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, 1993.
- Schetky, L. Mcd., “The Industrial Applications of Shape Memory Alloys in North America”, *Materials Science Forum*, v.327-328, pp. 9-16, 2000.

- Silva, E.P., “Modelagem Mecânica de Transformações de Fase induzidas por Tensões em Sólidos”, *Tese de Mestrado, Dept. Eng. Mecânica, UnB*, 1995.
- Simo, J.C. & Taylor, R.L., “A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v.22, pp. 649-670, 1986.
- Souza, A.C., Mamiya, E. & Zouain, N., “Three-Dimensional Model for Solids Undergoing Stress-Induced Phase Transformations”, *European Journal of Mechanics A: Solids*, n. 17, pp. 789-806, 1998.
- Tanaka, K. & Nagaki, S., “Thermomechanical Description of Materials with Internal Variables in the Process of Phase Transformation”, *Ingenieur – Archiv.*, v.51, pp. 287-299, 1982.
- Tanaka, K., “A Thermomechanical Sketch of Shape Memory Effect: One-Dimensional Tensile Behavior”, *Materials Science Research International*, v.18, pp. 251, 1985.
- van Humbeeck, J., “Non-medical Applications of Shape Memory Alloys”, *Materials Science and Engineering A*, v.273-275, pp.134-148, 1999.
- Wasilevski, R.J., “On the Nature of the Martensitic Transformation”, *Metallurgical Transactions*, v.6A, pp. 1405-1418, 1975.
- Zhang, J.X., Liu, Y.X., Cai, W. & Zhao, L.C., “The Mechanisms of Two-Way Shape Memory Effect in a Cu-Zn-Al Alloy”, *Materials Letters*, v. 33, pp. 211-214, 1997.