

DINÂMICA DE SISTEMAS MECÂNICOS



MODELAGEM,
SIMULAÇÃO,
VISUALIZAÇÃO,
VERIFICAÇÃO



ELMAR FERREIRA SANDOS


MUNDOON
Books

Dinâmica de Sistemas Mecânicos

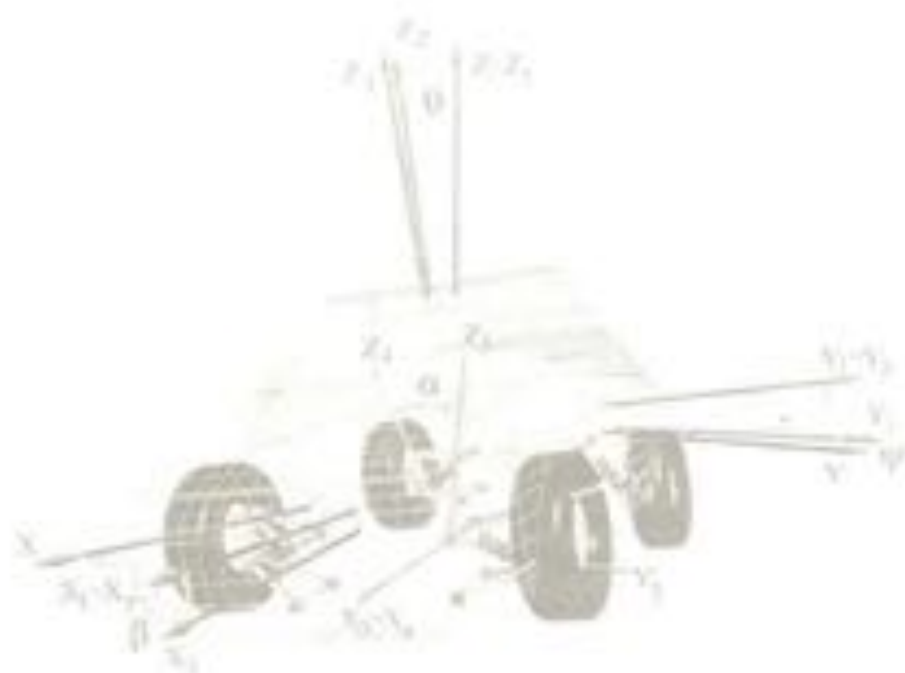
Modelagem – Simulação – Visualização – Verificação




Dinâmica de Sistemas Mecânicos

Modelagem – Simulação – Visualização – Verificação

Ilmar Ferreira Santos



 MAKRON Books Ltda.
Rua Tabapuã, 1.348, Itaim-Bibi
CEP 04533-004 – São Paulo
(0xx11) 3849-8604 e (0xx11) 3845-6622
e-mail: makron@books.com.br

São Paulo • Rio de Janeiro • Ribeirão Preto • Belém • Belo Horizonte • Brasília • Campo Grande • Curitiba • Florianópolis • Fortaleza • Goiânia • Manaus • Natal • Porto Alegre • Recife • Salvador
Barcelona • Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Ciudad de México • Frankfurt • Guadalajara • Lisboa • London • Madrid • Montevideo • New York • Paris • Porto • Santiago

Dinâmica de Sistemas Mecânicos – Modelagem – Simulação – Visualização – Verificação
Copyright © 2001 MAKRON Books Ltda.

Todos os direitos para a língua portuguesa reservados pela MAKRON Books Ltda. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida, guardada pelo sistema "retrieval" ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, seja este eletrônico, mecânico, de fotocópia, de gravação, ou outros, sem prévia autorização, por escrito, da Editora.

EDITOR: MILTON MIRA DE ASSUMPTÃO FILHO

Gerente de Produção
Sílas Camargo

Produtora Editorial
Salette Del Guerra

Capa
Marcelo da Silva Françaço

Editoração e Fotoritos em Alta Resolução; RIMA Artes e Textos

Dados de Catalogação na Publicação

Santos, Ilmar Ferreira
Dinâmica de Sistemas Mecânicos
Modelagem – Simulação – Visualização – Verificação
São Paulo: MAKRON Books, 2001.

ISBN: 85.346.1110-6

Sumário

Prefácio	VII
Introdução	IX
Capítulo 1 – Cinemática e Cinética de Partículas no Plano e no Espaço	1
1.1 Introdução	1
1.2 Cinemática de Partículas	1
1.3 Sistema de Referência Inercial	1
1.4 Sistema de Referência Móvel	3
1.5 Fixando Conceitos Através de Exemplos	11
1.5.1 Derivando a Matriz de Transformação de Coordenadas	11
1.5.2 Derivando Vetores em Termos de Direção	12
1.5.3 Derivando Vetores no Sistema Inercial e no Sistema Móvel	14
1.5.4 Duas Formas de Calcular a Aceleração Absoluta	18
1.5.5 Entendendo o Significado Físico da Aceleração de Coriolis	20
1.5.6 Entendendo Cada Termo da Equação da Aceleração	25
1.5.7 Derivando Vetores de Velocidade Angular	29
1.6 Diferenças Fundamentais entre os Movimentos no Plano e no Espaço	33
1.7 Cinética de Partículas	36
1.8 Exemplos Conceituais Resolvidos	37
1.8.1 Partícula Deslizando em um Cano Rotativo sem Atrito	37
1.8.2 Movimento Espacial com Duas Rotações Consecutivas	51
1.8.3 Movimento Espacial com Três Rotações Consecutivas	57
1.9 Cinemática e Cinética de Sistemas de Partículas	65
1.9.1 Pêndulo Duplo	65
1.10 Programas de Manipulação Simbólica	85
1.10.1 Obtendo as Equações de Movimento do Pêndulo Duplo com o Auxílio do Software <i>Mathematica</i>	85
1.11 Exercícios Propostos	93

Capítulo 2 – Cinemática e Cinética de Corpos Rígidos	99
2.2 Cinemática de Corpos Rígidos	100
2.3 Cinética de Corpos Rígidos	102
2.3.1 Quantidade de Movimento Linear de um Corpo Rígido	103
2.3.2 Variação da Quantidade de Movimento Linear	104
2.3.3 Quantidade de Movimento Angular de um Corpo Rígido	105
2.3.4 Teorema dos Eixos Paralelos	110
2.3.5 Direções Principais de Inércia	110
2.3.6 Variação da Quantidade de Movimento Angular	113
2.4 Método Newton-Euler	114
2.5 Fixando Conceitos Através de Exemplos	116
2.5.1 Calculando Momentos de Inércia de Corpo com Geometria Simples	116
2.5.2 Calculando Momentos de Inércia de Corpos com Geometria Complexa ...	120
2.5.3 Calculando o Tensor de Inércia de Corpos com Geometria Complexa via Programa Computacional em Linguagem MATLAB	122
2.6 Sistema de Múltiplos Corpos no Plano (Equações de Movimento + Reações Dinâmicas)	138
2.7 Sistema de Múltiplos Corpos no Plano com Deslizamento (Reações Dinâmicas)	154
2.8 Sistema de Múltiplos Corpos no Plano com Deslizamento (Equações de Movimento + Reações Dinâmicas)	166
2.9 Sistema de Múltiplos Corpos Deslizando com Atrito Seco (Equações de Movimento + Reações Dinâmicas)	176
2.10 Corpo Rígido no Espaço e Ângulos de Euler (Equações de Movimento + Reações Dinâmicas)	185
2.11 Corpo Rígido no Espaço com Rolamento (Equações de Movimento + Reações Dinâmicas)	206
2.12 Sistema de Múltiplos Corpos no Espaço (Equações de Movimento + Reações Dinâmicas)	219
2.13 Sistema de Múltiplos Corpos no Espaço sem Deslizamento (Cinemática)	232
2.14 Obtenção das Equações de Movimento sem Passar pelo Cálculo das Reações Dinâmicas	239
2.15 Aplicação a Corpos Rígidos – Pião	242
2.16 Equações de Movimento para um Sistema de Corpos Rígidos	245
2.17 Aplicação em Sistemas de Corpos Rígidos – Giroscópio	247
2.18 Aplicação em Sistemas de Corpos Rígidos – Satélite	252
2.19 Exercícios Propostos	260
Apêndice A – Momentos de Inércia de Massa	267
Bibliografia	271

Prefácio

Este livro apresenta um curso moderno de Dinâmica com uma visão holística e multidisciplinar, estruturado em exemplos teórico-experimentais, que mostram, por si mesmo, o significado físico de equações de movimento, estabilidade de sistemas mecânicos, trajetórias lineares e não-lineares de corpos e sistemas de referência e muitos outros conceitos básicos da Dinâmica.

O livro é acompanhado de um CD-ROM (veja Sobre o CD-ROM na Introdução). Este contém animações gráficas dos movimentos realizados por diferentes protótipos laboratoriais de sistemas mecânicos. Essas animações são criadas a partir das equações de movimentos levantadas em exemplos presentes no livro. Além das animações gráficas, os filmes ilustrando os movimentos reais desses protótipos são apresentados no CD-ROM, os quais auxiliam tanto os alunos na visualização de conceitos da disciplina, como os professores na apresentação de exemplos teórico-experimentais durante as aulas. Além disso, as filmagens dos movimentos dos protótipos enriquecem as aulas e trazem para dentro da sala de aula a sensação laboratorial da Dinâmica experimental.

Todos os exercícios (resolvidos e propostos) são elaborados com o intuito de desenvolver a visão holística e multidisciplinar do aluno, ou seja, a Dinâmica é apresentada interligada com o Cálculo, a Geometria Analítica, o Cálculo Numérico e os Métodos Computacionais. Esta visão multidisciplinar é uma tendência atual em todos os cursos modernos de engenharia.

Todos os tópicos teóricos são ilustrados na forma de exemplos e exercícios resolvidos. As animações gráficas presentes no CD-ROM contribuem de forma significativa para o esclarecimento da grande maioria das dúvidas e dificuldades encontradas pelos alunos, pois torna possível visualizar os movimentos dos sistemas móveis, partículas e corpos, sem a necessidade de grandes explicações verbais.

As etapas para a obtenção de equações de movimento e reações dinâmicas são abordadas de forma abrangente e metódica, deixando uma estrutura (procedimento) clara para solucionar a grande maioria dos problemas dinâmicos de forma similar, sejam os problemas de dinâmica de partícula ou sistemas de partículas, de dinâmica de corpo rígido no plano ou no espaço, ou de sistemas de corpos rígidos no plano ou no espaço. Utilizando o

CD-ROM, o aluno adquire uma visão global, resumida e "animada" das etapas para a resolução dos vários problemas de Dinâmica de Partícula e Corpo Rígido. Utilizando o livro, o aluno tem a oportunidade de se aprofundar em cada uma dessas etapas. O conjunto de exercícios propostos e os resolvidos contribuem de maneira fascinante para a sedimentação e compreensão do conjunto de etapas e a criação da visão holística e multidisciplinar dos problemas dinâmicos pelo aluno.

Introdução

Atualmente, o volume de informações a serem transmitidas, tendo por objetivo a formação de um engenheiro moderno e atualizado, é muito grande. Pelas experiências que tenho acumulado ao longo destes cinco anos, ministrando aulas relacionadas às disciplinas de Dinâmica, Mecanismos, Modelagem de Máquinas e Estruturas, Dinâmica de Rotores e Controle de Estruturas Flexíveis, a única forma de fazer com que os alunos assimilem mais intensamente o conteúdo dessas disciplinas é estruturá-las de modo que todos os mecanismos de aprendizagem do aluno sejam aproveitados.

Uma das maiores dificuldades dos alunos de graduação que cursam as disciplinas associadas à Dinâmica de Sistemas Mecânicos é a visualização e a compreensão de determinados fenômenos relacionados com movimentos e órbitas descritos por corpos e por sistemas móveis de referência. Uma vez entendidos e fundamentados os conceitos básicos relacionados com a representação de vetores em sistemas inerciais e móveis, e entendidos também o significado físico e a diferença de derivá-los, ora em um sistema ora em outro, chega-se à conclusão de que diferentes problemas práticos podem ser formulados matematicamente, sem riscos de erros conceituais, e resolvidos com o auxílio de computadores de forma não problemática.

A informática tem se desenvolvido rapidamente, viabilizando a simulação da dinâmica de sistemas mecânicos cada vez mais complexos. Nesse contexto, este livro tem por objetivo fundamental casar a dinâmica e a informática, na tentativa de utilizar a computação gráfica para auxiliar a visualização de conceitos básicos relacionados com a Cinemática e a Dinâmica de Sistemas de Corpos Rígidos. A utilização da informática para a simulação do comportamento dinâmico de diferentes sistemas mecânicos também é abordada aqui, mas seu enfoque fica em segundo plano.

Este texto, com finalidades fundamentalmente didáticas e acompanhado por CD-ROM contendo animações gráficas do comportamento dinâmico de alguns protótipos de sala de aula, visa facilitar o aprendizado e a visualização de determinados conceitos associados ao tema: Cinemática e Dinâmica. O livro procura também fornecer aos alunos os subsí-

dios e as informações mais importantes para a resolução de problemas mais complexos relacionados com:

- ▮ o dimensionamento dinâmico de estruturas;
- ▮ o levantamento de equações de movimento pelo Método Newton-Euler ou Newton-Euler-Jourdain;
- ▮ a simulação do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos por meio da resolução numérica das equações diferenciais;
- ▮ verificação e visualização de movimentos de alguns sistemas clássicos, como pêndulo duplo, giroscópio, pião, moeda, pêndulo invertido etc.;
- ▮ exemplos de aplicações da Cinemática e da Dinâmica em problemas industriais mais complexos, resolvidos didaticamente, abrangendo o dimensionamento dinâmico de estruturas, a otimização de projeto de sistemas dinâmicos (mecanismos), a estabilidade de movimentos etc.;
- ▮ exemplos de aplicação da Cinemática e da Dinâmica nas subáreas de:
 - Dinâmica de Manipuladores (Robôs)
 - Dinâmica de Rotores
 - Dinâmica de Satélites
 - Dinâmica de Veículos
 - Dinâmica de Mecanismos
 - Biomecânica

Na Figura L.1 são apresentadas as várias ramificações da Dinâmica. Nos últimos capítulos, após a consolidação dos conceitos básicos da Dinâmica, exemplos de aplicação industrial da Dinâmica em algumas das subáreas mencionadas serão estudados e detalhados.



Figura L.1
Subáreas da Dinâmica de Sistemas Mecânicos.

Outro objetivo do curso de Dinâmica é fortalecer as interligações com as disciplinas de Cálculo I, II e III, Geometria Analítica, Cálculo Numérico e Processamento de Dados, todas abordadas no ciclo básico. Deste fortalecimento resulta uma análise mais abrangente de sistemas dinâmicos compostos por vários corpos. A visão holística e multidisciplinar é uma tendência atual de todos os cursos modernos. Procura-se, ao longo deste livro, ilustrar de forma clara as interligações multidisciplinares, deixando sempre em foco a Dinâmica de Sistemas Mecânicos.

Gostaria, também, de deixar registrado meu agradecimento a todos os meus orientados de iniciação científica que, de forma direta ou indireta, auxiliaram-me na edição deste texto, dentre eles: Fernando Javier Marsal, Ivan Marques Rodarte, Alexandre Puls Ferretti, Gustavo Campos Padovese, Rodrigo Nicoletti, Fábio Hildebrand Russo, Alexandre Scalabrin, Daniel Carmona de Campos, Vinicius Stradiotti Zanetto, Fabiano Roncoletta e Alessandro G. S. Magrin. Agradeço, ainda, aos meus orientados de iniciação científica Eduardo Schmidek e Rodrigo Fernandes de Carvalho, pelo auxílio na produção das animações gráficas dos movimentos realizados pelos sistemas mecânicos modelados neste texto.

Um especial agradecimento é dirigido ao meu orientado Rodrigo Fernandes de Carvalho (Thunder) por sua dedicação e criatividade na elaboração do CD-ROM.

Ao Fundo de Apoio ao Ensino e à Pesquisa da Universidade Estadual de Campinas (FAEP), à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e à AUTODESK do Brasil dirijo meus agradecimentos.

Sobre o CD-ROM

O CD-ROM foi elaborado para ser utilizado como uma ferramenta auxiliar no entendimento dos tópicos abordados neste livro-texto. Ele apresenta tanto resultados teóricos provenientes da modelagem matemática dos sistemas mecânicos contidos no livro, quanto filmagem de protótipos experimentais. Com isto, objetiva-se despertar o interesse do leitor pela Dinâmica e pela descrição dos movimentos através de equações matemáticas. Além disto, auxiliá-lo na melhor compreensão e entendimento dos fenômenos físicos envolvidos.

As animações e os filmes, ilustrando experimentos elaborados com protótipos de laboratório, auxiliam o professor de Dinâmica a trazer para dentro da sala de aula

Um **laboratório virtual**, com demonstrações práticas e ilustrativas.

O CD-ROM está subdividido em 7 subdiretórios (pastas). Em cada subdiretório (pasta) o leitor encontra um arquivo **leia-me.doc**, o qual servirá de guia para o leitor na utilização mais adequada do CD-ROM. Recomenda-se ao leitor que utilize o CD-ROM juntamente com o livro-texto para um melhor aproveitamento. Se você encontrar alguma dificuldade com o CD-ROM, escreva para clientes@makron.com.br.



Capítulo 1

Cinemática e Cinética de Partículas no Plano e no Espaço

1.1 Introdução

Neste primeiro capítulo são abordados conceitos relacionados com sistemas de referência inercial I e móvel B , matrizes de transformação de coordenadas do sistema móvel para o inercial T^I e/ou do sistema inercial para o móvel T . Definem-se as grandezas físicas, como vetor de posição r , de velocidade v e de aceleração a , descrevendo-se tanto no sistema inercial como no móvel. Após o cálculo dessas grandezas vetoriais em função da geometria do sistema (CINEMÁTICA), respeitando suas condições de restrição, apresentam-se as leis de Newton, para que as causas dos diferentes movimentos (forças) sejam levadas em consideração nas equações que descrevem as grandezas vetoriais anteriormente mencionadas, ou seja, na CINÉTICA ou DINÂMICA do sistema mecânico.

1.2 Cinemática de Partículas

CINEMÁTICA é a parte da mecânica que estuda os movimentos de corpos sem se preocupar com suas causas. Toda a análise é feita do ponto de vista de sua geometria. Em outras palavras, as posições, velocidades e acelerações, lineares e angulares, são descritas em função da geometria do sistema mecânico.

1.3 Sistema de Referência Inercial

Para descrever o movimento de uma partícula é necessário, antes de mais nada, que se defina um sistema de referência, no qual os vetores de posição, velocidade e aceleração, bem como os de força possam ser representados. Toda representação matemática dos movimentos é, então, baseada em vetores unitários, ou cursores. Este sistema de referência, ou base vetorial com uma origem predefinida, pode ser inercial ou móvel.

- **Vetor de posição.** A Figura 1.1 ilustra a representação de um vetor de posição (posição da partícula A) em relação ao sistema inercial $I(X-Y-Z)$. Em notação vetorial, tem-se:

$${}_I \mathbf{r}_{OA} = \begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

ou

$${}_I \mathbf{r}_{OA} = x_o \mathbf{i} + y_o \mathbf{j} + z_o \mathbf{k}$$

O sistema de referência no qual o vetor de posição é representado é definido pelos cursores ou vetores unitários \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} e a origem O . As grandezas escalares x_o , y_o e z_o indicam a amplitude deste vetor nas respectivas direções.

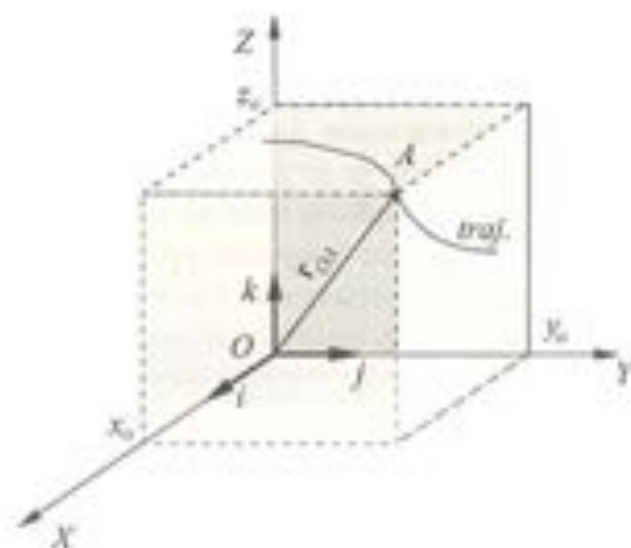


Figura 1.1
Vetor de posição de uma partícula A representado no sistema de referência inercial $I (X - Y - Z)$.

Vetor de velocidade. O vetor de velocidade absoluta é definido como a derivada do vetor de posição. É muito importante ressaltar aqui que a derivada do vetor de posição deve ser realizada quando o vetor de posição está representado no sistema de referência inercial, quando se deseja obter informações absolutas. O fato de derivar um vetor de posição, quando este está representado em um sistema móvel (girante), leva incondicionalmente à perda de informações. Este fato será ilustrado mais à frente, no Exemplo 2. Assim, o vetor de velocidade absoluta fica definido como:

$${}_I \mathbf{v}_A = \frac{d}{dt} ({}_I \mathbf{r}_{OA}) = \begin{Bmatrix} \frac{d}{dt}(x_o) \\ \frac{d}{dt}(y_o) \\ \frac{d}{dt}(z_o) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_o \\ \dot{y}_o \\ \dot{z}_o \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

ou

$${}_I \mathbf{v}_A = \dot{x}_o \mathbf{i} + \dot{y}_o \mathbf{j} + \dot{z}_o \mathbf{k}$$

Vetor de aceleração. O vetor de aceleração absoluta é definido como a derivada segunda do vetor de posição. É muito importante ressaltar aqui, mais uma vez, que a derivada segunda do vetor posição deve ser também realizada no sistema de referência inercial, quando se deseja obter informações sobre a aceleração absoluta.

$${}_I \mathbf{a}_A = \frac{d^2}{dt^2}({}_I \mathbf{r}_{OA}) = \frac{d}{dt}({}_I \mathbf{v}_A) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2}(x_o) \\ \frac{d^2}{dt^2}(y_o) \\ \frac{d^2}{dt^2}(z_o) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_o \\ \ddot{y}_o \\ \ddot{z}_o \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

ou

$${}_I \mathbf{a}_A = \ddot{x}_o \mathbf{i} + \ddot{y}_o \mathbf{j} + \ddot{z}_o \mathbf{k}$$

1.4 Sistema de Referência Móvel

Em muitos casos práticos, a descrição de determinadas órbitas e movimentos de partículas fica muito mais simples se um ou mais sistemas de referência móveis são definidos. Um exemplo disto é o pêndulo duplo, o qual será abordado no Exemplo 11 deste capítulo. O objetivo da utilização de sistemas móveis de referência na cinemática é facilitar a representação de determinados movimentos complexos, subdividindo-os em vários movimentos mais simples que se somam para compor o movimento absoluto. Aqui distinguem-se dois tipos de sistemas de referência móvel: (a) com translação pura e (b) com rotação pura. Todos os outros movimentos poderão sempre ser descritos como uma composição desses dois tipos de movimentos: a rotação e a translação.

Portanto, é fundamental estabelecer sempre uma relação entre os vários sistemas de referência (inercial e móveis) para viabilizar a passagem de um sistema móvel para o inercial, ou vice-versa, sem dificuldades. Introduz-se aqui o conceito de matriz de transformação de coordenadas, a qual é responsável por transformar a representação de um vetor descrito em um dado sistema (por exemplo, o móvel) em um outro sistema (por exemplo, o inercial).

a) Sistema Móvel Transladando

O sistema inercial $I (X - Y - Z)$ é representado pelos cursores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ e a origem O . O sistema móvel $B1 (X_1 - Y_1 - Z_1)$ é representado pelos cursores $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ e a origem A . Antes de mais nada, é necessário que se estabeleça uma relação entre os cursores do sistema inercial e do sistema móvel de referência. Esta relação será sempre dada pela matriz de transformação de coordenadas. O fato de um sistema móvel somente transladar implica necessariamente que os cursores do sistema inercial e os cursores do sistema móvel permaneçam sempre paralelos, ou seja,

$$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} = \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

$${}_{B1}\mathbf{s} = \mathbf{I} \cdot {}_I\mathbf{s}$$

$${}_I\mathbf{s} = \mathbf{I}^{-1} \cdot {}_{B1}\mathbf{s}$$

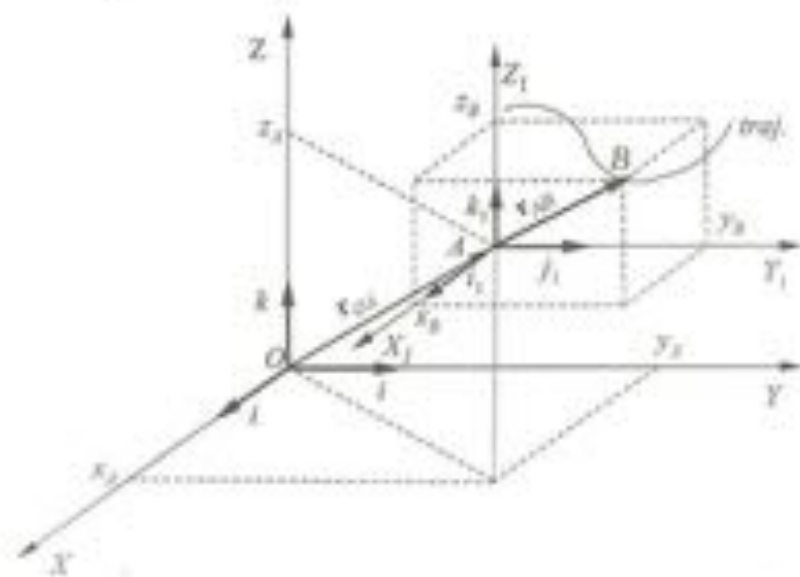


Figura 1.2
Relação entre os vetores unitários $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ do sistema inercial e $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ do sistema móvel.

Quando o sistema móvel só translada, a matriz de transformação de coordenadas, a qual leva a representação do vetor de uma base (por exemplo, I) para outra base (por exemplo, $B1$), é a matriz identidade, sendo esta *constante e invariante no tempo*.

Dado um vetor, ${}_I\mathbf{r}_{OB}$, o qual descreve a posição de uma partícula B em relação ao sistema inercial, pode-se reescrevê-lo como a soma de dois vetores, um representado no sistema inercial e outro, no sistema móvel:

$${}_I\mathbf{r}_{OB} = {}_I\mathbf{r}_{OA} + \mathbf{I} \cdot {}_{B1}\mathbf{r}_{AB}$$

em que ${}_I\mathbf{r}_{OA}$ é o vetor que descreve a posição do ponto A , origem do sistema móvel de referência, em relação ao ponto O . Este vetor é descrito diretamente no sistema inercial. O vetor ${}_{B1}\mathbf{r}_{AB}$ descreve a posição do ponto B em relação ao ponto A , e sua representação é feita normalmente no sistema móvel de referência $B1$. Ao se somarem os vetores, é necessário que todos eles estejam representados em um mesmo sistema. O vetor ${}_{B1}\mathbf{r}_{AB}$ é, então, transformado para a base inercial com o auxílio da matriz de transformação de coordenadas, ou seja,

$$\Rightarrow {}_I\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{I} \cdot {}_{B1}\mathbf{r}_{AB}$$

para que a soma dos vetores seja possível.

Utilizando-se a definição de velocidade absoluta, que é derivada do vetor de posição em relação ao tempo, quando este vetor for descrito no sistema inercial, chega-se a:

$$\begin{aligned} {}_I \mathbf{v}_B &= \frac{d}{dt}({}_I \mathbf{r}_{OB}) = \frac{d}{dt}({}_I \mathbf{r}_{OA} + \mathbf{I} \cdot {}_{BI} \mathbf{r}_{AB}) \\ {}_I \mathbf{v}_B &= \frac{d}{dt}({}_I \mathbf{r}_{OA}) + \underbrace{\frac{d}{dt}(\mathbf{I})}_{=0} \cdot {}_I \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{I} \cdot \frac{d}{dt}({}_{BI} \mathbf{r}_{AB}) \\ {}_I \mathbf{v}_B &= {}_I \mathbf{v}_A + \mathbf{I} \cdot {}_{BI} \mathbf{v}_{Brel} = {}_I \mathbf{v}_A + {}_I \mathbf{v}_{Brel} \end{aligned}$$

Analogamente, fazendo-se uso da definição de aceleração absoluta, que é a derivada segunda do vetor posição em relação ao tempo, quando este vetor for descrito no sistema inercial, tem-se que:

$$\begin{aligned} {}_I \mathbf{a}_B &= \frac{d^2}{dt^2}({}_I \mathbf{r}_{OB}) = \frac{d^2}{dt^2}({}_I \mathbf{r}_{OA} + \mathbf{I} \cdot {}_{BI} \mathbf{r}_{AB}) \\ {}_I \mathbf{a}_B &= {}_I \mathbf{a}_A + \mathbf{I} \cdot {}_{BI} \mathbf{a}_{Brel} = {}_I \mathbf{a}_A + {}_I \mathbf{a}_{Brel} \end{aligned}$$

b) Sistema Móvel Girando

O sistema inercial I ($X - Y - Z$) é representada pelos cursores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ e origem O . O sistema móvel BI ($X_1 - Y_1 - Z_1$) é representada pelos cursores $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ e origem A . Antes de mais nada, é necessário que se estabeleça uma relação entre os cursores do sistema inercial e os do sistema móvel de referência. Esta relação será sempre dada pela matriz de transformação de coordenadas. O fato de um sistema móvel girar implica que os cursores do sistema inercial e os cursores do sistema móvel deixem de ser paralelos e passem a guardar uma relação que depende do ângulo $\theta(t)$ entre os cursores da base inercial e da base móvel. O primeiro passo desta análise deve ser estabelecer a relação entre estes cursores para que se possa passar a representação de vetores de um sistema para outro sem maiores problemas.

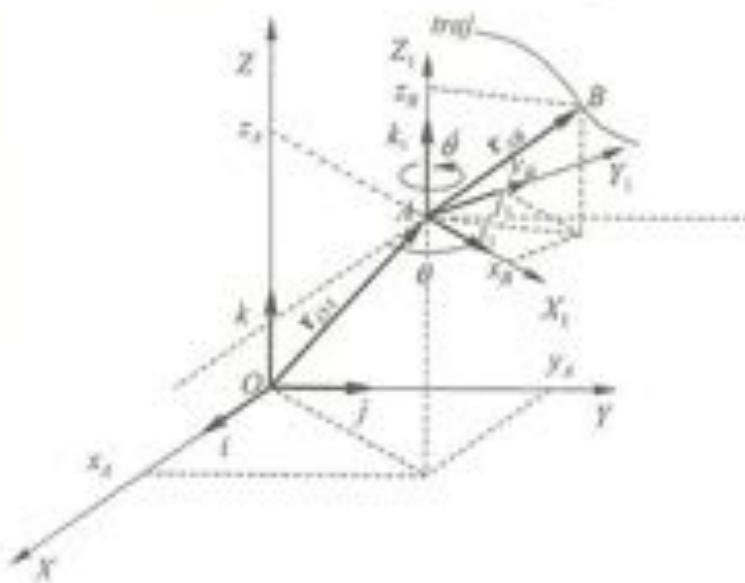


Figura 1.3

Sistema inercial I e sistema móvel de referência BI , representados pelos cursores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ e $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$: sistema móvel girando com uma velocidade angular $\theta(t)$ em torno do eixo Z do sistema inercial. Vetor \mathbf{r}_{OA} representado no sistema inercial I e vetor \mathbf{r}_{AB} representado no sistema móvel BI .

Suponha que o sistema móvel gire em torno do eixo Z no sentido positivo de acordo com a regra da mão direita. Pode-se, então, escrever os vetores de velocidade e aceleração angulares através das equações:

$${}_I\omega = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}(t) \end{Bmatrix} \quad {}_I\dot{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix}$$

Projetando-se os cursores da base móvel sobre a base inercial, chega-se à seguinte relação entre eles:

$$i_1 = \cos\theta i + \sin\theta j + 0k$$

$$j_1 = -\sin\theta i + \cos\theta j + 0k$$

$$k_1 = 0i + 0j + 1k$$

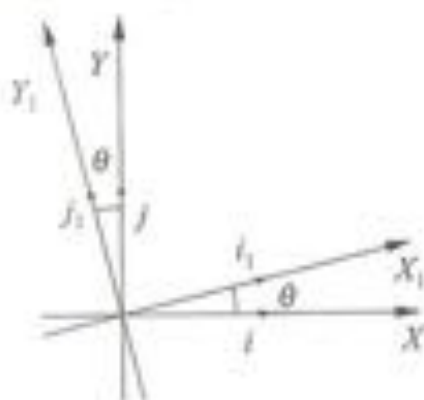


Figura 1.4
Projeção dos vetores unitários do sistema móvel sobre o sistema inercial.

Reescrevendo as três equações de forma matricial chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} {}_{B1}S = T_\theta \cdot {}_I S \\ {}_I S = T_\theta^{-1} \cdot {}_{B1} S \end{matrix}$$

Desta forma, qualquer vetor descrito no sistema I ou $B1$ pode ser reescrito em outro sistema $B1$ ou I simplesmente quando os mesmos são multiplicados pela matriz de transformação de coordenadas T_θ ou T_θ^{-1} . Ressalta-se aqui que as matrizes de transformação de coordenadas guardam propriedades importantes; por exemplo, seu determinante é sempre unitário e sua inversa é igual a sua transposta:

$$T_\theta^{-1} = T_\theta^T \Rightarrow {}_I S = T_\theta^T \cdot {}_{B1} S$$

Para rotações positivas nos eixos indicados Y e X têm-se as seguintes matrizes de transformação de coordenadas T_θ :

□ rotação positiva em torno do eixo Y :

$${}_{I}\omega = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$${}_{B1}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\theta} \cdot {}_I\mathbf{s} \Rightarrow {}_I\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\theta}^{-1} \cdot {}_{B1}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\theta}^T \cdot {}_{B1}\mathbf{s}$$

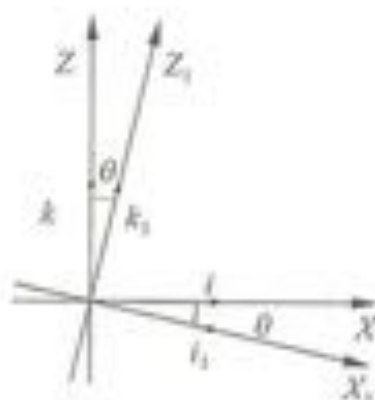


Figura 1.5

Rotação positiva em torno do eixo Y : ${}_{I}\omega = [0 \ \dot{\theta} \ 0]^T$.

□ rotação positiva em torno do eixo X :

$${}_{I}\omega = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}_{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

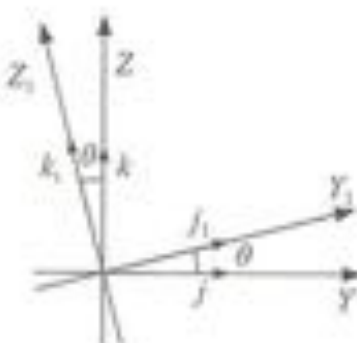


Figura 1.6

Rotação positiva em torno do eixo X : ${}_{I}\omega = [\dot{\theta} \ 0 \ 0]^T$.

A matriz de transformação de coordenadas \mathbf{T}_{θ} é uma matriz *dependente do tempo*, responsável por transformar a representação de um vetor descrito no sistema inercial para o sistema móvel $B1$. Sua transposta, por sua vez, transforma um vetor descrito no sistema móvel para o sistema inercial.

Imagine que um sistema inercial I de referência seja fixado no centro do Sol, ponto O . Simultaneamente, um sistema móvel $B1$ de referência é fixado no centro da Terra, ponto A . O ponto A (origem do sistema móvel solidário à Terra) tem um movimento de translação

em relação ao Sol. Além disso, o sistema de referência móvel tem uma velocidade angular absoluta ω composta por várias rotações consecutivas,¹ as quais serão explicadas em maiores detalhes no próximo capítulo. Deseja-se, então, descrever o movimento de um carro, partícula B em relação ao Sol, posição absoluta do carro ${}_I\mathbf{r}_{OB}$, quando este se movimenta pela superfície da Terra. O movimento do carro pode ser decomposto em movimentos mais simples, ou seja, o movimento do centro da Terra em relação ao Sol e o movimento do carro em relação ao centro da Terra. A distância entre o centro do Sol e o centro da Terra é conhecida, ${}_I\mathbf{r}_{OS}$. Igualmente conhecida é a variação dessa distância em função do tempo. A representação desse vetor é feita, então, no sistema inercial I . Os movimentos do carro na superfície da Terra, ou melhor, o vetor posição ${}_{B1}\mathbf{r}_{AB}$, é descrito em relação a um observador colocado no centro da Terra. Portanto, a base vetorial escolhida para a representação desse vetor é a $B1$, uma base girante com origem em A . Desta forma, ao trabalhar com os dois sistemas I e $B1$, é necessário poder passar de um para o outro. Isto é feito, então, através de matrizes de transformação de coordenadas. Descritos os vetores em uma base comum, viabiliza-se, assim, a soma dos mesmos para obter os vetores de posição, velocidades e aceleração na base (ou sistema de coordenadas) desejados.

- **Vetor de posição.** O vetor de posição é dado então por

$${}_I\mathbf{r}_{OB} = {}_I\mathbf{r}_{OS} + \frac{\mathbf{T}_0^T \cdot {}_{B1}\mathbf{r}_{AB}}{{}_I\mathbf{r}_{OS}} \cdot {}_I\mathbf{r}_{OS} + {}_I\mathbf{r}_{AB}$$

- **Vetor de velocidade.** O vetor de velocidade absoluta é obtido derivando-se o vetor de posição em relação ao tempo quando este é representado no sistema inercial:

$$\begin{aligned} {}_I\mathbf{v}_B &= \frac{d}{dt}({}_I\mathbf{r}_{OB}) = \frac{d}{dt}({}_I\mathbf{r}_{OS} + \mathbf{T}_0^T \cdot {}_{B1}\mathbf{r}_{AB}) = \\ {}_I\mathbf{v}_B &= \frac{d}{dt}({}_I\mathbf{r}_{OS}) + \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_0^T) \cdot {}_{B1}\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{T}_0^T \cdot \frac{d}{dt}({}_{B1}\mathbf{r}_{AB}) \\ {}_I\mathbf{v}_B &= {}_I\mathbf{v}_A + \underbrace{{}_I\omega \times (\mathbf{T}_0^T \cdot {}_{B1}\mathbf{r}_{AB})}_{{}_I\mathbf{v}_\omega} + \underbrace{\mathbf{T}_0^T \cdot {}_{B1}\mathbf{v}_{B1}}_{{}_I\mathbf{v}_A} \end{aligned}$$

A constatação de que $\frac{d}{dt}(\mathbf{T}_0^T) \cdot {}_{B1}\mathbf{r}_{AB} = {}_I\omega \times (\mathbf{T}_0^T \cdot {}_{B1}\mathbf{r}_{AB})$ será feita no Exemplo 1 deste capítulo. Assim, chega-se à expressão para a velocidade absoluta da partícula B , ${}_I\mathbf{v}_B$, descrita no sistema inercial:

1. A rotação da Terra é descrita pela precessão, nutação e *spin*. O *spin* pode ser comprovado pela existência dos dias e das noites. A precessão pode ser percebida pelas estações do ano: primavera, verão, outono e inverno. A nutação, relacionada com os movimentos de inclinação do eixo de rotação da Terra, pode ser detectada pelo fenômeno das glaciações. Pelo fato de esse movimento oscilatório ser muito lento e ter um período de milênios, o ser humano não é capaz de sentir seus efeitos.

$${}_I \mathbf{v}_B = {}_I \mathbf{v}_A + {}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{r}_{AB} + {}_I \mathbf{v}_{rel} \quad (1.4)$$

ou

$${}_I \mathbf{v}_B = {}_I \mathbf{v}_A + {}_I \boldsymbol{\omega} \times \underbrace{(\mathbf{T}_B^T \cdot {}_{B1} \mathbf{r}_{AB})}_{{}_I \mathbf{r}_{AB}} + \mathbf{T}_B^T \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}({}_{B1} \mathbf{r}_{AB})}_{{}_I \mathbf{v}_{rel}}$$

- ${}_I \mathbf{v}_A$ é a velocidade linear absoluta do ponto A (ponto onde o sistema móvel está posicionado) representada no sistema inercial I .
- ${}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{r}_{AB}$ é o produto vetorial da velocidade angular absoluta do sistema de referência móvel pelo vetor de posição ${}_I \mathbf{r}_{AB}$, sendo ambos descritos no sistema inercial. O vetor ${}_I \mathbf{r}_{AB}$ tem origem no ponto A e vai até o ponto de interesse B. Ressalta-se aqui que ${}_{B1} \mathbf{r}_{AB}$ é escrito geralmente no sistema móvel de referência B1 para facilitar a representação do movimento. Quando este vetor é multiplicado pela matriz de transformação de coordenadas \mathbf{T}_B^T , tem-se sua representação no sistema inercial.
- ${}_I \mathbf{v}_{rel}$ é a velocidade relativa do ponto B em relação ao ponto A. Esta velocidade é obtida quando se deriva o vetor posição ${}_{B1} \mathbf{r}_{AB}$ em relação ao tempo, quando este está representado no sistema móvel de referência, cuja velocidade angular absoluta é ${}_I \boldsymbol{\omega}$. Derivando-se este vetor, tem-se sua representação no sistema móvel B1. Faz-se, então, necessário, multiplicá-lo pela matriz de transformação de coordenadas \mathbf{T}_B^T para obter a representação desse vetor no sistema inercial. Em seguida, efetua-se a soma de todos os termos da equação, todos representados no mesmo sistema de referência.

ATENÇÃO Chama-se a atenção do leitor para um ponto muito importante: muitos alunos confundem o fato de se representar o vetor de velocidade absoluta no sistema móvel com o vetor de velocidade relativa. Ressalta-se aqui que um vetor de velocidade absoluta será sempre um vetor de velocidade absoluta. Como um vetor genérico pode ser representado tanto em um sistema móvel quanto em um inercial, representando o vetor de velocidade absoluta no sistema móvel, ele continuará sendo um vetor de velocidade absoluta, só que representado no sistema móvel. Um vetor de velocidade relativa também pode ser representado tanto em um sistema móvel quanto em um sistema inercial, e o fato de o vetor de velocidade relativa ser representado no sistema inercial não o torna um vetor de velocidade absoluta.

□ **Vetor de aceleração.** O vetor de aceleração é obtido derivando-se duas vezes o vetor de posição em relação ao tempo:

$${}_I \mathbf{a}_B = \frac{d^2}{dt^2}({}_I \mathbf{r}_{OB}) = \frac{d^2}{dt^2}({}_I \mathbf{r}_{OA} + \mathbf{T}_B^T \cdot {}_{B1} \mathbf{r}_{AB})$$

$${}_I \mathbf{a}_B = \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt}({}_I \mathbf{r}_{OA}) + \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_B^T) \cdot {}_{B1} \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{T}_B^T \cdot \frac{d}{dt}({}_{B1} \mathbf{r}_{AB}) \right]$$

$${}_I \mathbf{a}_B = \frac{d}{dt} \left[{}_I \mathbf{v}_A + {}_I \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{T}_B^T \cdot {}_{B1} \mathbf{r}_{AB}) + \mathbf{T}_B^T \cdot \frac{d}{dt}({}_{B1} \mathbf{r}_{AB}) \right]$$

$$\begin{aligned}
 {}_I \mathbf{a}_B &= \frac{d}{dt}({}_I \mathbf{v}_A) + \frac{d}{dt} \left[{}_I \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{T}_0^T \cdot m \mathbf{r}_{AB}) \right] + \frac{d}{dt} \left[\mathbf{T}_0^T \cdot \frac{d}{dt} (m \mathbf{r}_{AB}) \right] \\
 {}_I \mathbf{a}_B &= {}_I \mathbf{a}_A + \frac{d}{dt}({}_I \boldsymbol{\omega}) \times \left[(\mathbf{T}_0^T \cdot m \mathbf{r}_{AB}) \right] + {}_I \boldsymbol{\omega} \times \left[\frac{d}{dt} (\mathbf{T}_0^T \cdot m \mathbf{r}_{AB}) \right] + \\
 &+ {}_I \boldsymbol{\omega} \times \left[\mathbf{T}_0^T \cdot \frac{d}{dt} (m \mathbf{r}_{AB}) \right] + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_0^T) \cdot \frac{d}{dt} (m \mathbf{r}_{AB}) + \mathbf{T}_0^T \cdot \frac{d^2}{dt^2} (m \mathbf{r}_{AB}) \\
 {}_I \mathbf{a}_B &= {}_I \mathbf{a}_A + {}_I \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{T}_0^T \cdot m \mathbf{r}_{AB}) + {}_I \boldsymbol{\omega} \times \left[{}_I \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{T}_0^T \cdot m \mathbf{r}_{AB}) \right] + {}_I \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{T}_0^T \cdot m \mathbf{v}_{Brel}) + \\
 &+ {}_I \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{T}_0^T \cdot m \mathbf{v}_{Brel}) + \mathbf{T}_0^T \cdot (m \mathbf{a}_{Brel})
 \end{aligned}$$

$${}_I \mathbf{a}_B = {}_I \mathbf{a}_A + {}_I \dot{\boldsymbol{\omega}} \times {}_I \mathbf{r}_{AB} + {}_I \boldsymbol{\omega} \times ({}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{r}_{AB}) + 2 \cdot {}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{v}_{Brel} + {}_I \mathbf{a}_{Brel} \quad (1.5)$$

ou

$$\begin{aligned}
 {}_I \mathbf{a}_B &= {}_I \mathbf{a}_A + {}_I \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{T}_0^T \cdot m \mathbf{r}_{AB}) + {}_I \boldsymbol{\omega} \times \left[{}_I \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{T}_0^T \cdot m \mathbf{r}_{AB}) \right] + \\
 &+ 2 \cdot {}_I \boldsymbol{\omega} \times \left[\mathbf{T}_0^T \cdot \frac{d}{dt} (m \mathbf{r}_{AB}) \right] + \mathbf{T}_0^T \cdot \frac{d^2}{dt^2} (m \mathbf{r}_{AB})
 \end{aligned}$$

- ${}_I \mathbf{a}_A$ é a *aceleração linear absoluta* do ponto A , onde a origem do sistema móvel está posicionada, representada no sistema inercial I .
- ${}_I \dot{\boldsymbol{\omega}} \times {}_I \mathbf{r}_{AB}$ é o produto vetorial da *aceleração angular absoluta do sistema de referência móvel* pelo vetor de posição ${}_I \mathbf{r}_{AB}$, sendo ambos descritos no sistema inercial. O vetor ${}_I \mathbf{r}_{AB}$ tem origem no ponto A e vai até o ponto de interesse B . Este termo está diretamente relacionado à *aceleração tangencial*, decorrente do fato de o vetor ${}_I \boldsymbol{\omega}$ variar no tempo e o vetor ${}_I \mathbf{r}_{AB}$ estar fixo neste sistema móvel, sendo acelerado angularmente.
- ${}_I \boldsymbol{\omega} \times ({}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{r}_{AB})$ é o produto vetorial duplo da *velocidade angular absoluta do sistema de referência móvel* pelo vetor resultante da operação ${}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{r}_{AB}$. Este termo está relacionado à *variação do vetor de velocidade* ${}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{r}_{AB}$ em termos de sua direção. Este vetor ${}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{r}_{AB}$ gira com uma *velocidade angular* ${}_I \boldsymbol{\omega}$.
- $2 \cdot {}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{v}_{Brel}$ é o produto vetorial da *velocidade angular absoluta do sistema móvel* pela *velocidade relativa*, ambas representadas no sistema inercial I . Este termo é conhecido como *aceleração de Coriolis* e resulta da *variação do vetor de velocidade relativa* ${}_I \mathbf{v}_{Brel}$ em termos de direção. Este vetor gira no espaço com uma *velocidade angular* ${}_I \boldsymbol{\omega}$. No Exemplo 5 deste capítulo, o significado físico e matemático desta aceleração será abordado.
- ${}_I \mathbf{a}_{Brel}$ é a *aceleração relativa* do ponto B em relação ao ponto A (origem do sistema móvel de referência). Esta aceleração é obtida quando se derivam duas vezes o vetor

de posição ${}_{B1}\mathbf{r}_{AB}$ em relação ao tempo, sendo este representado no sistema móvel de referência, cuja velocidade angular é $\dot{\theta}$. Derivando-se este vetor no sistema móvel, tem-se sua representação no sistema móvel $B1$. Faz-se necessário, então, multiplicá-lo pela matriz de transformação de coordenadas \mathbf{T}_θ^T para obter a representação deste vetor na base inercial e poder efetuar a soma de todos os termos da Equação 1.5 em uma mesma base.

A seguir, apresentam-se alguns exemplos conceituais resolvidos, nos quais o objetivo fundamental é a familiarização do leitor com os conceitos apresentados de: sistemas móveis de referência; representação de vetores de posição em diferentes sistemas de coordenadas; obtenção de vetores de velocidade e aceleração, absoluta e/ou relativa, dependendo do sistema de referência no qual a operação de derivação do vetor é realizada; e significado físico desses vetores e dessas derivações.

1.5 Fixando Conceitos Através de Exemplos

1.5.1 Derivando a Matriz de Transformação de Coordenadas

Exemplo 1

Verifique a afirmativa de que $\frac{d}{dt}(\mathbf{T}_\theta^T) \cdot {}_{B1}\mathbf{r}_{AB} = {}_I\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{T}_\theta^T \cdot {}_{B1}\mathbf{r}_{AB})$, ou seja, que a derivada da transposta da matriz de transformação de coordenadas, multiplicada escalarmente pelo vetor ${}_{B1}\mathbf{r}_{AB}$, descrito em um sistema móvel $B1$ girando com velocidade angular $\dot{\theta}$, é igual ao produto vetorial da respectiva velocidade angular pelo resultado da projeção do vetor ${}_{B1}\mathbf{r}_{AB}$ na base inercial, ou seja, ${}_I\mathbf{r}_{AB}$.

Resolução: Dado um vetor genérico ${}_{B1}\mathbf{r}_{AB} = \{r_x \ r_y \ r_z\}^T$ e o vetor de velocidade angular ${}_I\boldsymbol{\omega} = \{0 \ 0 \ \dot{\theta}\}$, escreve-se para o primeiro termo da igualdade:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_\theta^T) \cdot {}_{B1}\mathbf{r}_{AB} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot {}_{B1}\mathbf{r}_{AB} = \\ &= \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta & -\dot{\theta}\cos\theta & 0 \\ \dot{\theta}\cos\theta & -\dot{\theta}\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}(r_x \sin\theta + r_y \cos\theta) \\ \dot{\theta}(r_x \cos\theta - r_y \sin\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para o segundo termo da igualdade escreve-se que:

$$\begin{aligned}
 {}_I\omega \times (T_{\theta}^T \cdot {}_B\mathbf{r}_{AB}) &= {}_I\omega \times \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \\
 &= {}_I\omega \times \begin{pmatrix} r_x \cos\theta - r_y \sin\theta \\ r_x \sin\theta + r_y \cos\theta \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (r_x \cos\theta - r_y \sin\theta) \\ (r_x \sin\theta + r_y \cos\theta) \\ r_z \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -\dot{\theta}(r_x \sin\theta + r_y \cos\theta) \\ \dot{\theta}(r_x \cos\theta - r_y \sin\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

Comparando-se as Equações 1.6 e 1.7, verifica-se a igualdade em questão.

1.5.2 Derivando Vetores em Termos de Direção

Exemplo 2

O objetivo deste exemplo é deixar claro que um vetor de posição com módulo constante $\|{}_I\mathbf{r}\|$, girando com velocidade angular também constante $\dot{\theta}$, apresenta tanto um vetor de velocidade \mathbf{v} como um de aceleração \mathbf{a} .

Resolução: Um vetor é sempre representado por uma amplitude e uma direção. Quando este é derivado no sistema inercial, sua derivada total é composta pela derivada de sua amplitude e de sua direção. Se um vetor de posição tem amplitude constante, mas gira com velocidade angular $\dot{\theta}$ constante, sua derivada em termos de amplitude é nula, mas sua derivada em termos de direção não. Além disto, esta derivada pode ser facilmente calculada através do produto vetorial do vetor de velocidade angular ${}_I\omega$ pelo próprio vetor:

$$\|{}_I\mathbf{r}\| = \text{cte}; \quad \frac{d}{{}_I dt}({}_I\mathbf{r}) = {}_I\omega \times {}_I\mathbf{r} = {}_I\mathbf{v}$$

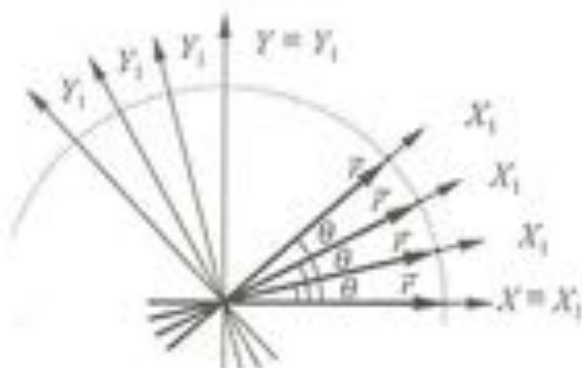


Figura 1.7
Vetor de posição em quatro instantes de tempo diferentes.

Quando o vetor de posição \mathbf{r} é multiplicado uma vez pelo vetor de velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, obtém-se o vetor de velocidade \mathbf{v} , o qual também apresenta amplitude constante. Mas este vetor de velocidade, por sua vez, também varia em termos de direção, como pode ser visto na Figura 1.8. Logo, para calcular a derivada desse vetor de velocidade em termos de sua direção, basta multiplicá-lo novamente pelo vetor de velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$. Esta multiplicação vetorial resulta, então, no vetor de aceleração \mathbf{a} , também com módulo constante:

$$\|\mathbf{v}\| = \text{cte}: \quad \frac{d}{dt}({}_I\mathbf{v}) = {}_I\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = {}_I\boldsymbol{\omega} \times ({}_I\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{a}$$

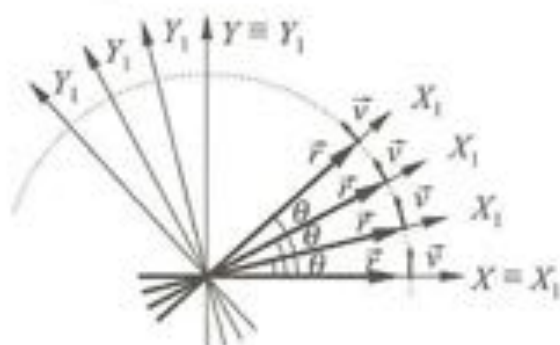


Figura 1.8
Vetor de velocidade em quatro instantes de tempo diferentes.

O vetor de velocidade representa a velocidade tangencial da partícula e o vetor de aceleração representa a aceleração centrífuga. Observa-se nitidamente aqui que, apesar de o vetor de posição permanecer constante em módulo, apresenta variações de direção, o que gera velocidade e aceleração. Para derivar um vetor de posição uma vez em termos de sua direção, multiplica-se o mesmo vetorialmente por $\boldsymbol{\omega}$. Para derivá-lo duas vezes, multiplica-se o mesmo duas vezes por $\boldsymbol{\omega}$.

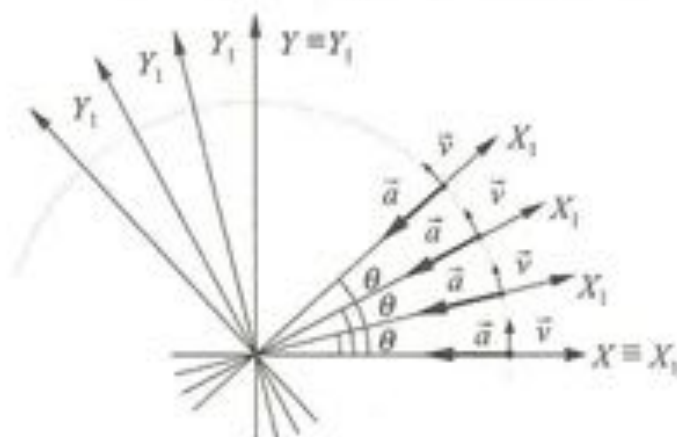


Figura 1.9
Vetor de aceleração em quatro instantes de tempo diferentes.

1.5.3 Derivando Vetores no Sistema Inercial e no Sistema Móvel

Exemplo 3

O objetivo deste exemplo é deixar clara a relação entre o cálculo vetorial e o significado físico do mesmo dentro da cinemática. Por exemplo, a derivada de vetores em relação ao tempo deve ser realizada sempre no sistema inercial, para que velocidades e acelerações absolutas sejam obtidas e para que informações não sejam perdidas. Ao derivar um vetor em relação ao tempo, deve-se derivá-lo tanto no que diz respeito a seu módulo quanto a sua direção. Uma vez que se derivem vetores no sistema móvel de referência, perdem-se as informações sobre as derivadas do vetor quanto à direção e o que se obtém, como resultado, é somente a derivada do vetor quanto a seu módulo. Deseja-se, então, exemplificar que, dado um vetor \mathbf{s} qualquer, representado no sistema inercial I e em um sistema girante B :

$$\frac{d}{dt}({}_I\mathbf{s}) \neq \frac{d}{dt}({}_B\mathbf{s}) \quad e \quad \frac{d^2}{dt^2}({}_I\mathbf{s}) \neq \frac{d^2}{dt^2}({}_B\mathbf{s})$$

Imagine que o pistão hidráulico com uma massa m em sua extremidade gire com velocidade angular $\dot{\theta}$ em relação ao eixo Z (inercial). Um sistema móvel de referência X_1, Y_1, Z_1 , solidário ao pistão, gira também com uma velocidade angular $\dot{\theta}$. Você está sentado na origem do sistema móvel girante (ponto $O \equiv A$). Esta origem coincide em qualquer tempo t com a origem do sistema inercial, pois o sistema móvel não translada. Você gira, então, juntamente com o sistema móvel e observa a massa m se movimentar na direção positiva do eixo X_1 .

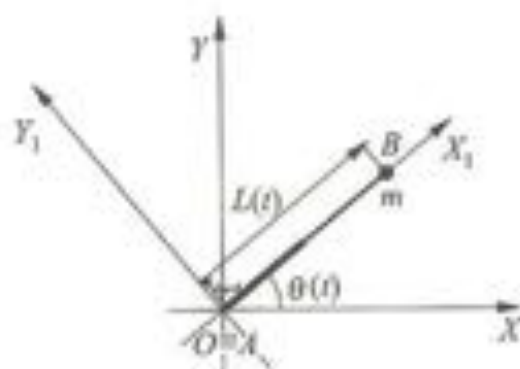


Figura 1.10

Um observador sentado em um sistema girante medindo o movimento da massa m (partícula B).

Resolução:

(a) Definição dos sistemas de referência:

sistema inercial I (X, Y, Z), representado pelos cursores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

sistema móvel B (X_1, Y_1, Z_1), representado pelos cursores $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$

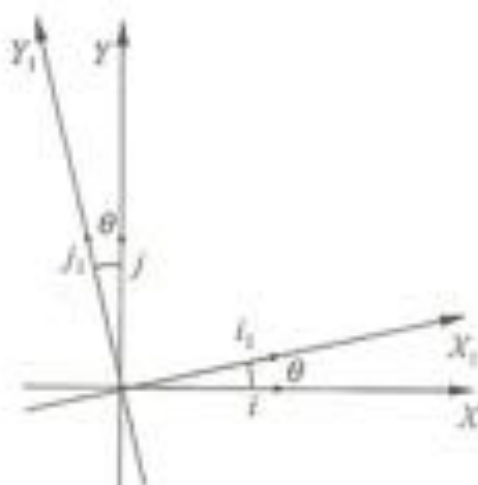


Figura 1.11
Rotação positiva da base $B1$ em torno do eixo Z (inercial).

(b) *Matriz de transformação de coordenadas:*

$$i_1 = \cos\theta i + \sin\theta j + 0 k$$

$$j_1 = -\sin\theta i + \cos\theta j + 0 k$$

$$k_1 = 0 i + 0 j + 1 k$$

$$\begin{Bmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix}$$

$${}_{B1} s = \mathbf{T} s$$

$${}_I s = \mathbf{T}^T {}_{B1} s$$

(c) *Velocidade e aceleração angular do sistema móvel representada no sistema inercial I:*

$${}_I \omega = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad {}_I \dot{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

(d) *Vetor de posição L descrito no sistema girante $B1$ e no inercial I:*

$${}_{B1} L = \begin{Bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

O vetor ${}_{B1} L$ pode ser representado no sistema inercial I quando se multiplica este pela matriz de transformação de coordenadas \mathbf{T}^T , ou seja:

$${}_I \mathbf{L} = \mathbf{T}_{B1}^T {}_{B1} \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \cos\theta \\ L \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

(e) Vetor de velocidade linear – este é calculado quando se deriva o vetor de posição,

$$\frac{d}{dt}({}_I \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} \dot{L} \cos\theta - L\dot{\theta} \sin\theta \\ \dot{L} \sin\theta + L\dot{\theta} \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

A seguir deriva-se o mesmo vetor de posição quando este é representado no sistema móvel B1:

$$\frac{d}{dt}({}_{B1} \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} \dot{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Logo, observa-se nitidamente através das Equações 1.8 e 1.9 que, ao derivar o vetor \mathbf{L} no sistema inercial I e no sistema móvel B1, chega-se a valores completamente diferentes. Resta somente saber interpretar o significado de cada um deles.

Quando se deriva um vetor de posição no sistema inercial I, obtém-se a velocidade absoluta da partícula representada no sistema inercial, ou seja:

$$\frac{d}{dt}({}_I \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} \dot{L} \cos\theta - L\dot{\theta} \sin\theta \\ \dot{L} \sin\theta + L\dot{\theta} \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} = {}_I \mathbf{v}_B \quad (1.10)$$

Quando se deriva um vetor de posição no sistema móvel girante B1, obtém-se a velocidade relativa da partícula representada no sistema móvel de referência B1, ou seja,

$$\frac{d}{dt}({}_{B1} \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} \dot{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = {}_{B1} \mathbf{v}_{Brel} \quad (1.11)$$

Observando-se a Equação 1.11 detecta-se que, se você está sentado na origem do sistema móvel, girando junto com o sistema, a única velocidade que consegue observar é ${}_{B1} \mathbf{v}_{Brel}$, ou seja, o vetor de posição aumentando ou diminuindo, $\dot{L}(t)$.

Multiplicando-se o vetor ${}_{B1} \mathbf{v}_{Brel}$ pela matriz de transformação de coordenadas \mathbf{T}_{B1}^T , obtém-se a representação da velocidade relativa no sistema inercial,

$${}_I \mathbf{v}_{Brel} = \mathbf{T}_{B1}^T {}_{B1} \mathbf{v}_{Brel} \Rightarrow {}_I \mathbf{v}_{Brel} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{L} \cos\theta \\ \dot{L} \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Comparando-se os dois vetores dados nas Equações 1.12 e 1.8, pois ambos estão agora descritos no mesmo sistema de referência, verifica-se que o vetor ${}_1\mathbf{v}_{Rel}$ compõe uma parte do vetor ${}_1\mathbf{v}_B$. Esta parte está diretamente relacionada à variação do vetor em termos de amplitude, L . Logo, observa-se que ao derivar um vetor no sistema móvel obtiveram-se somente as informações relacionadas às variações de amplitude do vetor de posição. Variações relacionadas à rotação do vetor, ou seja, termos dependentes de $\dot{\theta}$, não foram detectadas quando se derivou o mesmo no sistema móvel. No exemplo anterior ilustrou-se que a derivada de um vetor qualquer \mathbf{r} , em termos de direção, era dada pelo produto vetorial de sua velocidade angular por ele mesmo, ou seja: $\dot{\omega} \times \mathbf{r}$. Assim, somando-se à Equação 1.12 a derivada do vetor \mathbf{L} em relação a sua direção, $\dot{\omega} \times \mathbf{L}$, obtém-se o vetor de velocidade absoluta do mesmo, composta pela derivada de sua amplitude e de sua direção:

$${}_1\mathbf{v}_{Rel} + {}_1\dot{\omega} \times \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \dot{L}\cos\theta \\ \dot{L}\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ L\cos\theta & L\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{L}\cos\theta - L\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{L}\sin\theta + L\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Comparando-se as Equações 1.13, 1.12 e 1.8 verifica-se a afirmativa de que, ao derivar um vetor qualquer em um sistema de referência girante, perde-se invariavelmente a informação da derivada de sua direção, ou $\dot{\omega} \times \mathbf{r}$. Para compensar o fato de se derivar um vetor em um sistema girante $B1$, deve-se somar sempre o termo $\dot{\omega} \times \mathbf{L}$, que nada mais é que a derivada do vetor \mathbf{L} em termos de sua direção:

$$\frac{d}{dt}({}_1\mathbf{L}) = \underbrace{T^T \frac{d}{dt}({}_{B1}\mathbf{L})}_{\text{var. direção}} + \underbrace{{}_1\dot{\omega} \times \mathbf{L}}_{\text{var. direção}} \quad (1.14)$$

Para um caso mais geral, em que o ponto A está transladando em relação ao ponto O , com uma velocidade linear ${}_1\mathbf{v}_A$, tem-se:

$${}_1\mathbf{v}_B = {}_1\mathbf{v}_A + {}_1\dot{\omega} \times \mathbf{L} + {}_1\mathbf{v}_{Rel}$$

(f) Vetor de aceleração linear – este é calculado quando se derivam duas vezes o vetor de posição em relação ao tempo.

Primeiramente, deriva-se o vetor de posição no sistema inercial, ou seja, deriva-se o vetor em relação ao tempo, quando sua representação é feita no sistema inercial:

$$\frac{d^2}{dt^2}({}_1\mathbf{L}) = \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} L\cos\theta \\ L\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{L}\cos\theta - L\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{L}\sin\theta + L\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}({}_1\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} \ddot{L}\cos\theta - \dot{L}\dot{\theta}\sin\theta - L\ddot{\theta}\sin\theta - L\dot{\theta}^2\cos\theta \\ \ddot{L}\sin\theta + \dot{L}\dot{\theta}\cos\theta + L\ddot{\theta}\cos\theta + L\dot{\theta}^2\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}({}_I \mathbf{L}) = \begin{Bmatrix} \dot{L} \cos \theta \\ \dot{L} \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2\dot{L}\dot{\theta} \sin \theta - L\ddot{\theta} \sin \theta - L\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ 2\dot{L}\dot{\theta} \cos \theta + L\ddot{\theta} \cos \theta - L\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = {}_I \mathbf{a}_B \quad (1.15)$$

Em seguida, deriva-se o vetor de posição duas vezes no sistema móvel, ou seja, deriva-se o vetor de posição quando sua representação é feita no sistema de coordenadas móvel:

$$\frac{d^2}{dt^2}({}_B \mathbf{L}) = \frac{d^2}{dt^2} \begin{Bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{L} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = {}_B \mathbf{a}_{Brel} \quad (1.16)$$

Verifica-se, então, ao se comparar as Equações 1.15 e 1.16, que a derivada segunda de um vetor no sistema inercial e no sistema móvel é completamente diferente. O vetor de aceleração dado na Equação 1.16 está representado na base móvel $B1$ e só pode ser comparado com o vetor dado na Equação 1.15 quando a sua representação é transformada para o sistema inercial. Assim,

$$\mathbf{T}^T \frac{d^2}{dt^2}({}_B \mathbf{L}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{L} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{L} \cos \theta \\ \ddot{L} \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} = {}_I \mathbf{a}_{Brel} \quad (1.17)$$

Observando-se as Equações 1.15 e 1.16 detecta-se nitidamente a diferença entre as duas acelerações. Verifica-se que, ao derivar duas vezes o vetor de posição no sistema móvel, muitas informações foram perdidas, e todas elas relacionadas com $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$, ou seja, com a variação do vetor em termos de direção. Assim, ao derivar o vetor de posição duas vezes no sistema móvel, obtém-se a aceleração relativa ${}_B \mathbf{a}_{Brel}$ da partícula, cuja representação está no sistema móvel de coordenadas. Multiplicando-a pela matriz de transformação de coordenadas obtém-se sua representação no sistema inercial, ${}_I \mathbf{a}_{Brel}$.

1.5.4 Duas Formas de Calcular a Aceleração Absoluta

Exemplo 4

O objetivo deste exemplo é deixar claro que há duas maneiras de calcular a aceleração de uma partícula: derivando-se o vetor de posição duas vezes em relação ao tempo, sendo que este vetor precisa necessariamente estar representado no sistema inercial (ver Equação 1.15), ou utilizando-se a Equação 1.5. Pensando no Exemplo 3, ilustra-se a afirmativa:

Resolução:

1ª Forma de cálculo:

$${}_1\mathbf{a}_B = \frac{d^2}{dt^2}({}_1\mathbf{L}) = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} L \cos \theta \\ L \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{L} \cos \theta - 2\dot{L}\dot{\theta} \sin \theta - L\ddot{\theta} \sin \theta - L\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \ddot{L} \sin \theta + 2\dot{L}\dot{\theta} \cos \theta + L\ddot{\theta} \cos \theta - L\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

2ª Forma de cálculo:

$${}_1\mathbf{a}_B = \underbrace{{}_1\mathbf{a}_A}_{=0} + {}_1\boldsymbol{\omega} \times {}_1\boldsymbol{\omega} \times {}_1\mathbf{L} + {}_1\ddot{\boldsymbol{\omega}} \times {}_1\mathbf{L} + 2 \cdot {}_1\boldsymbol{\omega} \times {}_1\mathbf{v}_{Rel} + {}_1\mathbf{a}_{Rel}$$

Conhecendo-se os termos

$${}_1\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, \quad {}_1\ddot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}, \quad {}_1\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L \cos \theta \\ L \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad {}_1\mathbf{v}_{Rel} = \begin{pmatrix} \dot{L} \cos \theta \\ \dot{L} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

calculam-se as quatro parcelas da equação da aceleração.

Parcela relacionada com a aceleração normal:

$${}_1\boldsymbol{\omega} \times {}_1\boldsymbol{\omega} \times {}_1\mathbf{L} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ -L\dot{\theta} \sin \theta & L\dot{\theta} \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -L\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ -L\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parcela relacionada com a aceleração tangencial:

$${}_1\ddot{\boldsymbol{\omega}} \times {}_1\mathbf{L} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \ddot{\theta} \\ L \cos \theta & L \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -L\ddot{\theta} \sin \theta \\ L\ddot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parcela relacionada com a aceleração de Coriolis:

$$2 \cdot {}_1\boldsymbol{\omega} \times {}_1\mathbf{v}_{Rel} = 2 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ \dot{L} \cos \theta & \dot{L} \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2\dot{\theta}\dot{L} \sin \theta \\ 2\dot{\theta}\dot{L} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parcela relacionada com a aceleração relativa:

$${}_1\mathbf{a}_{Rel} = \mathbf{T}_B^T \cdot \frac{d^2}{dt^2}({}_{B1}\mathbf{L}) = \begin{pmatrix} \ddot{L} \cos \theta \\ \ddot{L} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somando-se as quatro parcelas chega-se à expressão da aceleração absoluta:

$${}_1\mathbf{a}_B = \begin{pmatrix} \ddot{L} \cos \theta - 2\dot{L}\dot{\theta} \sin \theta - L\ddot{\theta} \sin \theta - L\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ \ddot{L} \sin \theta + 2\dot{L}\dot{\theta} \cos \theta + L\ddot{\theta} \cos \theta - L\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Comparando-se as Equações 1.18 e 1.19 verifica-se as duas maneiras de cálculo da aceleração. Ressalta-se que a segunda maneira é mais utilizada quando se deseja a aceleração absoluta da partícula representada em sistemas móveis de referência.

1.5.5 Entendendo o Significado Físico da Aceleração de Coriolis

Exemplo 5

O objetivo deste exemplo é deixar claro conceitos relacionados com a aceleração de Coriolis, sua interpretação matemática e física. Ao mesmo tempo, calcula-se a aceleração absoluta de um ponto genérico do disco secundário D.

Imagine o disco principal B, mostrado na Figura 1.12, girando com velocidade angular ω constante. Um disco secundário D é montado a uma distância b em relação ao centro de rotação do disco principal, sobre o suporte C, o qual está fixo no disco principal. O centro do disco secundário se encontra a uma altura c em relação ao disco principal e sua rotação p é constante. Deseja-se, aqui, calcular a aceleração absoluta de um ponto A no disco secundário, exatamente no instante em que $\theta = 0$ e o ponto A encontra-se na posição vertical em relação ao centro do disco secundário.

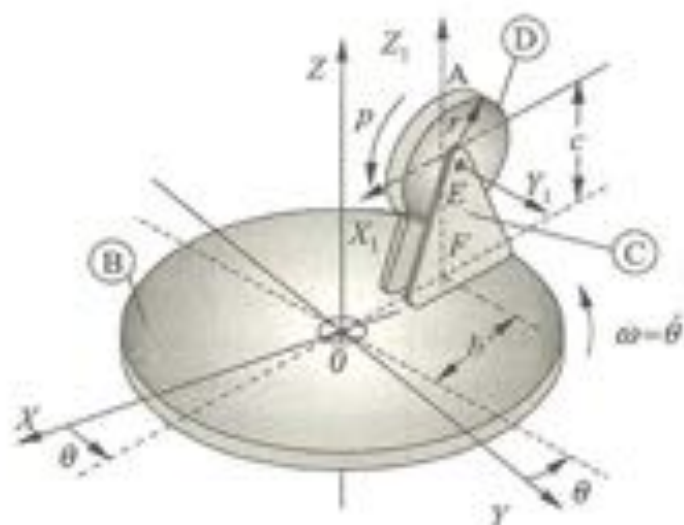
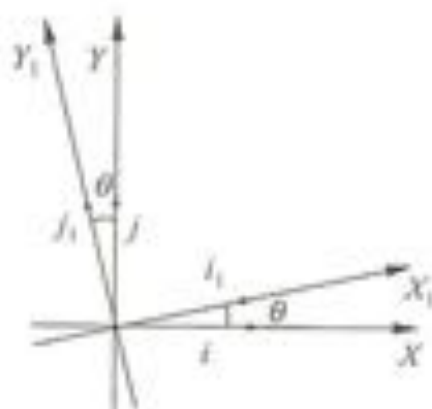


Figura 1.12
Disco principal B girando com um disco secundário D.

Resolução:

(a) **Sistemas de Referência:** mais uma vez ressalta-se que a primeira etapa para o estudo da cinemática de qualquer sistema mecânico é a definição dos sistemas de referência. Toda e qualquer representação matemática só tem sentido a partir da definição dos sistemas de referência. Aqui se tem:

- Sistema inercial I – XYZ representado pelos cursores \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} e posicionado no ponto O;
- Sistema móvel B1 – X_1, Y_1, Z_1 representado pelos cursores \mathbf{i}_1 , \mathbf{j}_1 , \mathbf{k}_1 , sendo sua origem posicionada no ponto E, o qual está solidário ao corpo C.


Figura 1.13

Rotação do sistema móvel $B1$ em torno do Z – vista do plano XY em um instante genérico, trasladando-se os cursores i, j, k_1 para a origem do sistema inercial.

(b) Matrizes de transformação de coordenadas:

$$i_1 = \cos\theta i + \sin\theta j + 0 k$$

$$j_1 = -\sin\theta i + \cos\theta j + 0 k$$

$$k_1 = 0 i + 0 j + 1 k$$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

$${}_B s = T_{\theta} {}_I s$$

$${}_I s = T_{\theta}^T {}_B s$$

No instante de análise, $\theta = 0$, o que resulta em uma matriz de transformação de coordenadas igual à matriz identidade:

$$T_{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ressalta-se aqui, mais uma vez, que a matriz de transformação de coordenadas é a identidade somente no instante considerado.

(c) Velocidade e aceleração angular do sistema móvel de referência, representado no sistema inercial:

$${}_I \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad \frac{d}{dt} {}_I \omega = {}_I \dot{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ pois } \omega \text{ é constante.}$$

(d) *Grandezas descritas de forma vetorial:*

Distância entre a origem do sistema inercial e o ponto onde o sistema móvel de referência está posicionado: se este vetor for escrito na base móvel, ou seja, com auxílio dos cursores \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , e em seguida transformado para a base inercial, tem-se:

$${}_{01}\mathbf{r}_{OE} = \begin{Bmatrix} -b \\ 0 \\ c \end{Bmatrix} \Rightarrow {}_I\mathbf{r}_{OE} = \mathbf{T}_0^T {}_{01}\mathbf{r}_{OE} = \begin{Bmatrix} -b \\ 0 \\ c \end{Bmatrix}$$

Distância entre a origem do sistema móvel de referência e o ponto cujo movimento está sendo analisado: a distância entre o ponto E e o ponto A é r . No instante em questão este ponto está sobre o eixo Z_1 . Escrevendo-se este vetor na base móvel de referência e transformando-o para o sistema inercial, tem-se:

$${}_{01}\mathbf{r}_{EA} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{Bmatrix} \Rightarrow {}_I\mathbf{r}_{EA} = \mathbf{T}_0^T {}_{01}\mathbf{r}_{EA} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{Bmatrix}$$

A velocidade angular p do disco D ocorre na base móvel, ou seja, é uma rotação positiva em torno do eixo Y_1 :

$${}_{01}\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow {}_I\mathbf{p} = \mathbf{T}_0^T {}_{01}\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(e) *Cálculo da velocidade absoluta do ponto A no instante considerado, representando-a no sistema inercial I:*

$${}_I\mathbf{v}_A = {}_I\mathbf{v}_E + {}_I\boldsymbol{\omega} \times {}_I\mathbf{r}_{EA} + {}_I\mathbf{v}_{R_{01}}$$

em que ${}_I\mathbf{v}_E$ é a velocidade linear do ponto onde o sistema móvel de referência está fixado, ${}_I\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular absoluta do sistema móvel de referência, ${}_I\mathbf{r}_{EA}$ é a distância entre a origem do sistema móvel de referência e o ponto cuja velocidade deve ser calculada e ${}_I\mathbf{v}_{R_{01}}$ é a velocidade observada quando se está posicionado na origem do sistema móvel de referência.

$${}_I\mathbf{v}_E = {}_I\boldsymbol{\omega} \times {}_I\mathbf{r}_{OE} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -b & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -b\omega \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_I\boldsymbol{\omega} \times {}_I\mathbf{r}_{EA} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & r \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_I \mathbf{v}_{Brel} = {}_I \mathbf{p} \times {}_I \mathbf{r}_{EA} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & r \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} pr \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}_I \mathbf{v}_A = \begin{pmatrix} pr \\ -b\omega \\ 0 \end{pmatrix} \quad [m/s]$$

(f) Cálculo da aceleração absoluta da partícula no instante considerado, representando-a no sistema inercial de referência:

$${}_I \mathbf{a}_A = {}_I \mathbf{a}_E + {}_I \boldsymbol{\omega} \times ({}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{r}_{EA}) + \dot{{}_I \boldsymbol{\omega}} \times {}_I \mathbf{r}_{EA} + 2 \cdot {}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{v}_{Brel} + {}_I \mathbf{a}_{Brel}$$

$${}_I \mathbf{a}_E = {}_I \boldsymbol{\omega} \times ({}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{r}_{OE}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -b\omega & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} b\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}_I \boldsymbol{\omega} \times ({}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{r}_{EA}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pois os vetores ${}_I \boldsymbol{\omega}$ e ${}_I \mathbf{r}_{EA}$ são paralelos

$${}_I \dot{\boldsymbol{\omega}} \times {}_I \mathbf{r}_{EA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot {}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{v}_{Brel} = 2 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ pr & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2pr\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}_I \mathbf{a}_{Brel} = {}_I \mathbf{p} \times ({}_I \mathbf{p} \times {}_I \mathbf{r}_{EA}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & p & 0 \\ pr & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p^2 r \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}_I \mathbf{a}_A = \begin{pmatrix} b\omega^2 \\ -pr \\ -rp^2 \end{pmatrix} \quad [m/s^2]$$

Observando-se as três componentes da aceleração no instante em que $\theta = 0$, é fácil entender o significado físico do termo $\omega^2 r$ na direção X . Trata-se da aceleração normal, decorrente do fato de o vetor de posição \mathbf{r}_{OE} estar variando em termos de direção em função de ω , resultando no vetor velocidade \mathbf{v}_E , que por sua vez também tem módulo constante, mas varia em direção. Uma variação da direção do vetor de velocidade acarreta sempre uma aceleração que, neste caso, é a aceleração normal. O significado físico do termo $-\omega^2 r$ na direção negativa de Z também é fácil de ser compreendido, pois se trata também de uma aceleração normal, em que o vetor de posição \mathbf{r}_{EA} com módulo constante varia em termos de direção com uma velocidade \mathbf{p} , gerando o vetor de velocidade (relativa) com módulo constante ωr . Este vetor de velocidade varia em termos de direção novamente, em função de \mathbf{p} . Uma variação da direção do vetor de velocidade acarreta sempre uma aceleração que, neste caso, é a aceleração normal (relativa).

A maior dificuldade para entender o termo $2\omega \times \mathbf{p}$ na direção Y , ou seja, a aceleração de Coriolis, concentra-se no fato de esquecer que o vetor de posição \mathbf{r}_{EA} e o vetor de velocidade angular \mathbf{p} estão também variando em termos de direção com uma velocidade angular ω . O produto vetorial entre os vetores \mathbf{p} e \mathbf{r}_{EA} resulta na velocidade relativa da partícula A em relação à origem da base móvel (ponto E). Imaginando que o vetor de velocidade relativa gira em torno do eixo Z , visualiza-se nitidamente que o vetor de velocidade relativa está variando em termos de direção. Uma variação na direção do vetor de velocidade acarreta sempre uma aceleração. Neste caso, o vetor é o vetor de velocidade relativa e a aceleração resultante é a de Coriolis. Assim, para entender a aceleração de Coriolis, fica mais fácil pensar em termos de vetor de velocidade (relativa) variando em termos de direção. As Figuras 1.14 e 1.15, ilustram os vetores de velocidade e aceleração absolutas, e detalham cada uma das parcelas que compõem esses vetores.

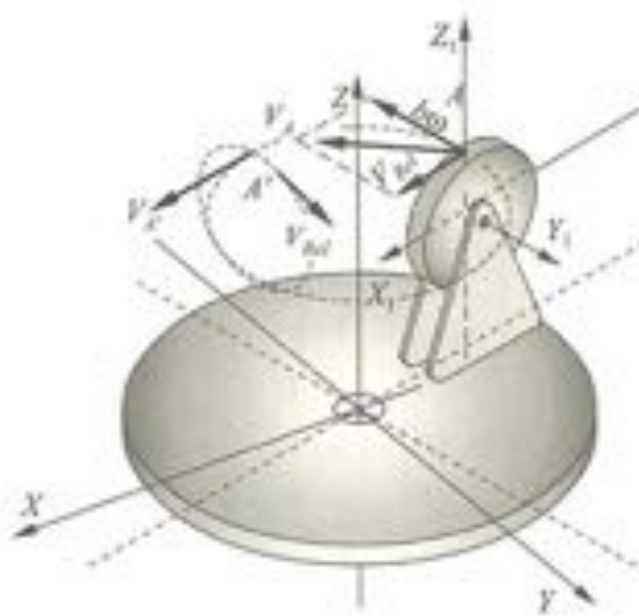


Figura 1.14
Representação vetorial das parcelas da velocidade absoluta do ponto A .

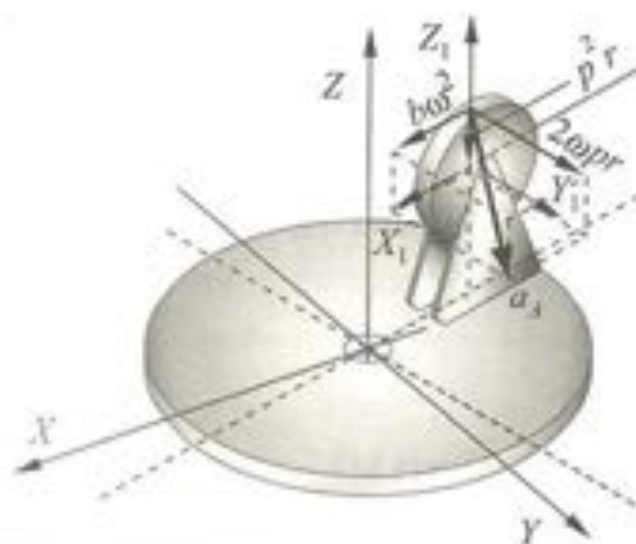


Figura 1.15
 Representação vetorial das parcelas da
 aceleração absoluta do ponto A.

1.5.6 Entendendo Cada Termo da Equação da Aceleração

Exemplo 6

O objetivo deste exemplo é representar, vetorialmente, cada termo que compõe a aceleração absoluta de uma partícula que se desloca em um sistema de referência girante. Imagine uma placa montada em um eixo rotativo. Nesta placa constrói-se um rasgo onde uma partícula A, conectada a uma mola, executa um movimento retilíneo. O eixo gira com uma velocidade angular $\dot{\theta}(t)$ e uma aceleração angular $\ddot{\theta}(t)$. A partícula executa movimentos oscilatórios retilíneos $s(t)$ dentro do rasgo. O rasgo é construído na placa com um ângulo de inclinação β (fixo), como é mostrado na Figura 1.16.

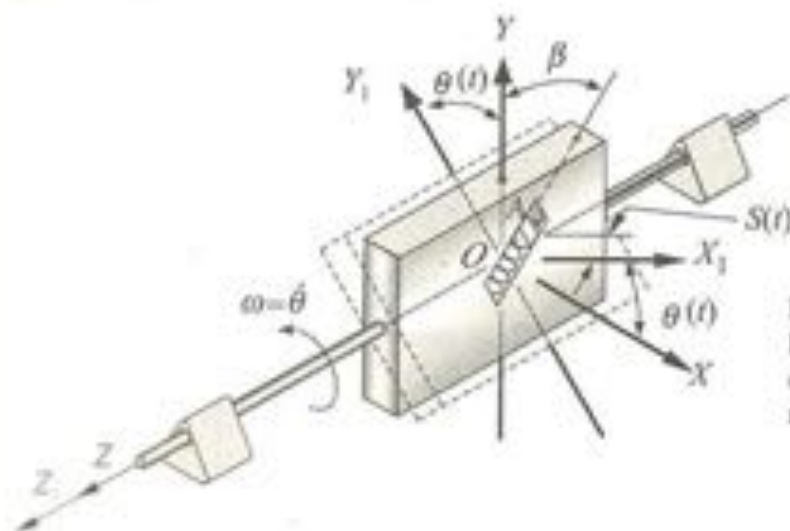


Figura 1.16
 Partícula A conectada a uma mola,
 oscilando no rasgo de uma placa
 rotativa.

Resolução:(a) *Definição dos sistemas de referência:*

- Sistema inercial I – X, Y, Z representado pelos cursores i, j, k (origem no centro da placa O).
- Sistema móvel B1 – X_1, Y_1, Z_1 representado pelos cursores i_1, j_1, k_1 (origem no centro da placa O).

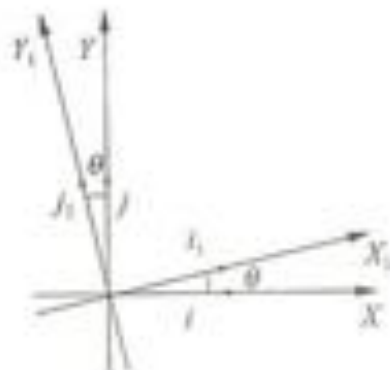


Figura 1.17

Rotação de B1 em torno de Z.

(b) *Definição da matriz de transformação de coordenadas:*

$$i_1 = \cos\theta i + \sin\theta j + 0 k$$

$$j_1 = -\sin\theta i + \cos\theta j + 0 k$$

$$k_1 = 0 i + 0 j + 1 k$$

$$\begin{Bmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix}$$

$${}_m s = T_{\theta} {}_1 s$$

$${}_1 s = T_{\theta}^T {}_m s$$

(c) *Vetor de deslocamento:*

$${}_m r_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ s \cos\beta \\ -s \sin\beta \end{Bmatrix} \Rightarrow {}_1 r_A = T_{\theta}^T {}_m r_A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ s \cos\beta \\ -s \sin\beta \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}_1 r_A = \begin{Bmatrix} -s \sin\theta \cos\beta \\ s \cos\theta \cos\beta \\ -s \sin\beta \end{Bmatrix}$$

(d) *Vetor de aceleração:*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A &= \frac{d^2}{dt^2}({}_1\mathbf{r}_A) = \frac{d^2}{dt^2} \begin{Bmatrix} -s \sin \theta \cos \beta \\ s \cos \theta \cos \beta \\ -s \sin \beta \end{Bmatrix} \\ \mathbf{a}_A &= \begin{Bmatrix} -\ddot{s} \sin \theta \cos \beta - \dot{s} \dot{\theta} \cos \theta \cos \beta - \dot{s} \dot{\theta} \cos \theta \cos \beta - s \ddot{\theta} \cos \theta \cos \beta + s \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \beta \\ \ddot{s} \cos \theta \cos \beta - \dot{s} \dot{\theta} \sin \theta \cos \beta - \dot{s} \dot{\theta} \sin \theta \cos \beta - s \ddot{\theta} \sin \theta \cos \beta - s \dot{\theta}^2 \cos \theta \cos \beta \\ -\ddot{s} \sin \beta \end{Bmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{a}_A &= \begin{Bmatrix} -\ddot{s} \sin \theta \cos \beta - 2\dot{s} \dot{\theta} \cos \theta \cos \beta - s \ddot{\theta} \cos \theta \cos \beta + s \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \beta \\ \ddot{s} \cos \theta \cos \beta - 2\dot{s} \dot{\theta} \sin \theta \cos \beta - s \ddot{\theta} \sin \theta \cos \beta - s \dot{\theta}^2 \cos \theta \cos \beta \\ -\ddot{s} \sin \beta \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvendo o mesmo problema de outra maneira, ou seja, com o auxílio da Equação 1.5, tem-se:

$${}_1\mathbf{a}_A = \underbrace{{}_1\mathbf{a}_O}_{=0} + \omega \times \omega \times {}_1\mathbf{r}_A + \dot{\omega} \times {}_1\mathbf{r}_A + 2 \cdot \omega \times {}_1\mathbf{v}_{rel} + {}_1\mathbf{a}_{rel}$$

Sabendo-se que

$$\omega = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}, \quad \dot{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

calcula-se cada um dos termos da equação da aceleração:

$$\omega \times \omega \times {}_1\mathbf{r}_A = \omega \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ -s \sin \theta \cos \beta & s \cos \theta \cos \beta & -s \sin \beta \end{vmatrix}$$

$$\omega \times \dot{\omega} \times {}_1\mathbf{r}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ -s \dot{\theta} \cos \theta \cos \beta & -s \dot{\theta} \sin \theta \cos \beta & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} s \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \beta \\ -s \dot{\theta}^2 \cos \theta \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\omega} \times {}_1\mathbf{r}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \ddot{\theta} \\ -s \sin \theta \cos \beta & s \cos \theta \cos \beta & -s \sin \beta \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -s \ddot{\theta} \cos \theta \cos \beta \\ -s \ddot{\theta} \sin \theta \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 m \mathbf{v}_{Rel} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{s} \cos \beta \\ -\dot{s} \sin \beta \end{bmatrix} \\
 {}_I \mathbf{v}_{Rel} &= \mathbf{T}_\theta^T m \mathbf{v}_{Rel} = {}_I \mathbf{v}_{Rel} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{s} \cos \beta \\ -\dot{s} \sin \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{s} \sin \theta \cos \beta \\ \dot{s} \cos \theta \cos \beta \\ -\dot{s} \sin \beta \end{bmatrix} \\
 2 \cdot {}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{v}_{Rel} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ -\dot{s} \sin \theta \cos \beta & \dot{s} \cos \theta \cos \beta & -\dot{s} \sin \beta \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2\dot{\theta} \cos \theta \cos \beta \\ -2\dot{\theta} \sin \theta \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix} \\
 m \mathbf{a}_{Rel} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{s} \cos \beta \\ -\ddot{s} \sin \beta \end{bmatrix} \\
 {}_I \mathbf{a}_{Rel} &= \mathbf{T}_\theta^T m \mathbf{a}_{Rel} = \begin{bmatrix} -\ddot{s} \sin \theta \cos \beta \\ \ddot{s} \cos \theta \cos \beta \\ -\ddot{s} \sin \beta \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Somando-se os termos calculados, obtém-se:

$$\Rightarrow {}_I \mathbf{a}_A = \begin{bmatrix} -\ddot{s} \sin \theta \cos \beta - 2\dot{\theta} \cos \theta \cos \beta - \dot{s} \ddot{\theta} \cos \theta \cos \beta + \dot{s} \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \beta \\ \ddot{s} \cos \theta \cos \beta - 2\dot{\theta} \sin \theta \cos \beta - \dot{s} \ddot{\theta} \sin \theta \cos \beta - \dot{s} \dot{\theta}^2 \cos \theta \cos \beta \\ -\ddot{s} \sin \beta \end{bmatrix}$$

Nas Figuras 1.18 e 1.19 observa-se a representação das componentes da velocidade e da aceleração da partícula A.

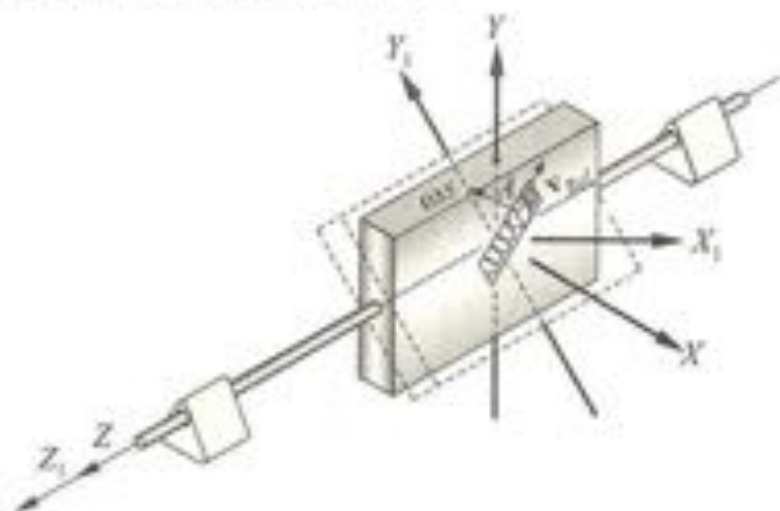


Figura 1.18
Representação vetorial das componentes da velocidade absoluta do ponto A.

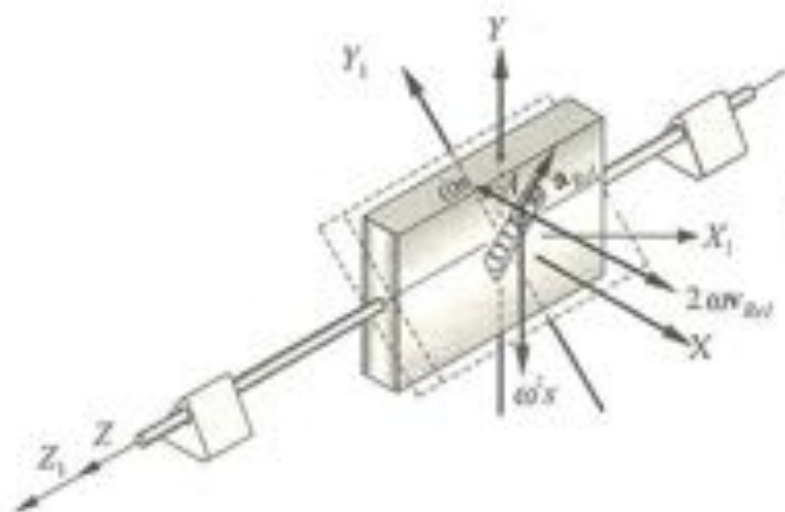


Figura 1.19
 Representação vetorial das componentes da aceleração absoluta do ponto A.

1.5.7 Derivando Vetores de Velocidade Angular

Exemplo 7

O sistema mecânico mostrado na Figura 1.20 é composto pela estrutura A, pelo rotor B, pelo braço com massa desprezível C e pela massa concentrada D. Três sistemas de referência são utilizados, sendo o primeiro o inercial, I, o segundo, B1, fixo no rotor e o terceiro, B2, solidário ao sistema braço C. A velocidade angular do rotor é $\dot{\beta}$ rad/s, variando com uma taxa de $\ddot{\beta}$ rad/s. Em um dado instante genérico t , os ângulos β e φ são diferentes de zero, e a rotação do sistema braço-massa pontual é dada por $\dot{\varphi}$, variando com $\ddot{\varphi}$.

(a) Calcule as matrizes de transformação de coordenadas dos sistemas móveis para o inercial e vice-versa.

(b) Determine uma expressão analítica para a velocidade angular absoluta da base B2, representando-a no sistema de referência inercial I e móvel B2.

(c) Mostre que

$$\frac{d}{dt}({}_I\omega) = \mathbf{T}_\beta^T \cdot \mathbf{T}_\varphi^T \frac{d}{dt}({}_{B2}\omega)$$

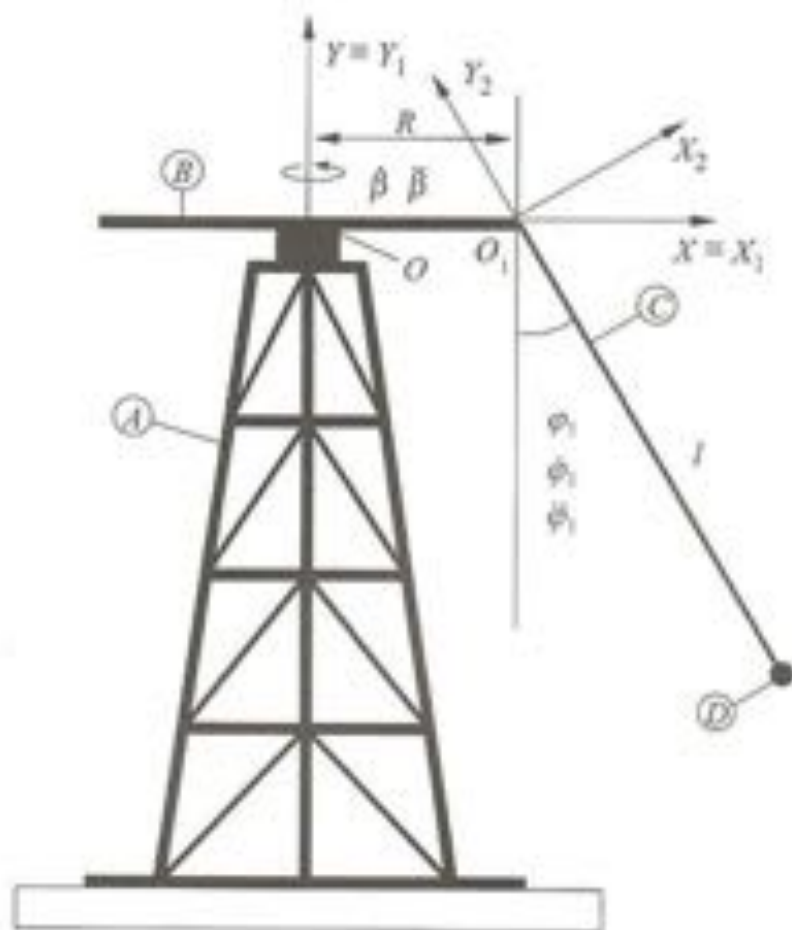


Figura 1.20

Sistema mecânico composto pela estrutura A, pelo rotor B, pelo braço com massa desprezível C e pela massa concentrada D. No instante de tempo ilustrado, o sistema de coordenadas inercial I coincide com o sistema móvel B1.

Resolução:

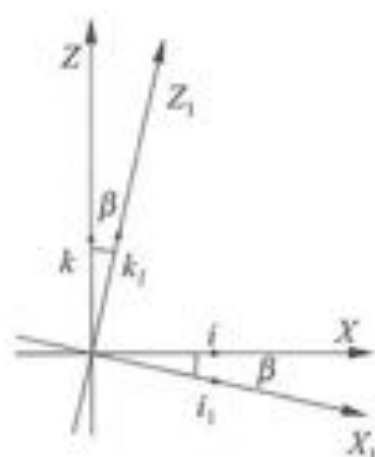
Antes de mais nada, definem-se os vários sistemas de coordenadas, inercial e móveis, como indicado a seguir:

- Sistema inercial I , X, Y, Z , representado pelos cursores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (origem O).
 - Sistema móvel B1, X_1, Y_1, Z_1 , representado pelos cursores $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ (origem O).
 - Sistema móvel B2, X_2, Y_2, Z_2 , representado pelos cursores $\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2$ (origem O_1).
- (a) A primeira rotação ocorre no sistema inercial em torno do eixo Y , ${}_{I}\dot{\beta} = \{0, \dot{\beta}, 0\}^T$

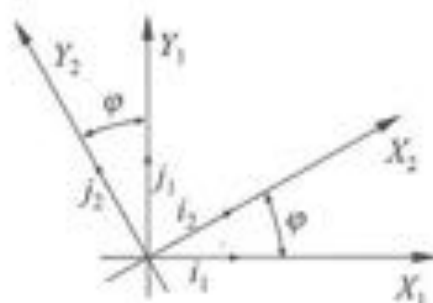
$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{k}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix}$$

$${}_{I}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\beta} {}_{B1}\mathbf{s}$$

$${}_{B1}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\beta}^T {}_{I}\mathbf{s}$$


 Figura 1.21
 Rotação em torno de Y.

A segunda rotação ocorre no sistema B1 em torno do eixo Z_1 , ${}_{B1}\dot{\phi} = \{0, 0, \dot{\phi}\}^T$:


 Figura 1.22
 Rotação em torno de Z_1 .

$$\begin{Bmatrix} i_2 \\ j_2 \\ k_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{Bmatrix}$$

$${}_{B2}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\varphi}^T {}_{B1}\mathbf{s}$$

$${}_{B1}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\varphi} {}_{B2}\mathbf{s}$$

(b) A velocidade angular absoluta do sistema B2 é composta por duas rotações consecutivas: $\dot{\beta}$ e $\dot{\phi}$. Para escrever o vetor de velocidade angular absoluta no sistema ${}_{B2}\omega$, é necessário que os vetores $\dot{\beta}$ e ${}_{B1}\dot{\phi}$ sejam transformados para o sistema B2, ou seja:

$${}_{B2}\omega = \mathbf{T}_{\varphi} \cdot \mathbf{T}_{\beta} \cdot \dot{\beta} + \mathbf{T}_{\varphi} \cdot {}_{B1}\dot{\phi}$$

$${}_{B2}\omega = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$${}_{B2}\omega = \begin{bmatrix} \dot{\beta}\sin\varphi \\ \dot{\beta}\cos\varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

A velocidade angular absoluta do sistema de referência B2 representada no sistema inercial é:

$${}_{I}\omega = {}_{I}\dot{\beta} + \mathbf{T}_{\beta}^T \cdot {}_{B2}\dot{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\sin\beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\varphi}\cos\beta \end{bmatrix}$$

(c) Derivando-se a velocidade angular em relação ao tempo, quando esta é descrita no sistema inercial, obtém-se a aceleração angular absoluta da partícula, representada no sistema inercial:

$$\frac{d}{dt}({}_{I}\omega) = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}\sin\beta + \dot{\varphi}\dot{\beta}\cos\beta \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\varphi}\cos\beta - \dot{\varphi}\dot{\beta}\sin\beta \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Foi visto que, ao derivar um vetor de velocidade linear em relação ao tempo, este precisa ser derivado quando sua representação está sendo feita no sistema inercial. De outra forma, informações sobre a variação da direção são perdidas. Para as velocidades angulares, isto geralmente não acontece, ou seja, tanto faz derivá-las no sistema móvel ou no inercial. O vetor resultante $d/dt({}_{B2}\omega)$ está representado no sistema móvel e, para ser comparado com $d/dt({}_{I}\omega)$, precisa ser transformado para o sistema I:

$$\mathbf{T}_{\beta}^T \cdot \mathbf{T}_{\varphi}^T \frac{d}{dt}({}_{B2}\omega) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta}\sin\varphi + \dot{\beta}\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{\beta}\cos\varphi - \dot{\beta}\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{\beta}^T \cdot \mathbf{T}_{\varphi}^T \frac{d}{dt}({}_{B2}\omega) = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}\sin\beta + \dot{\varphi}\dot{\beta}\cos\beta \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\varphi}\cos\beta - \dot{\varphi}\dot{\beta}\sin\beta \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Comparando-se a Equação 1.20 com a Equação 1.21 observa-se que, ao derivar o vetor de velocidades angulares na base móvel, ao contrário dos vetores de velocidades lineares, não se perdem as informações relacionadas com a variação de direção.

OBSERVAÇÃO: Generalizando, tem-se que o vetor de aceleração angular absoluta ${}_{B_1}\dot{\omega}_P$ representado em um sistema móvel de coordenadas B_i , cuja velocidade angular absoluta do sistema B_i é Ω_i , será dado por

$${}_{B_i}\dot{\omega}_P = \frac{d}{dt}({}_{B_i}\omega_P) + {}_{B_i}\Omega_i \times {}_{B_i}\omega_P \quad (1.22)$$

e, portanto, se ${}_{B_i}\Omega_i$ for igual a ${}_{B_i}\omega_P$, estes vetores são paralelos e o produto vetorial ${}_{B_i}\Omega_i \times {}_{B_i}\omega_P$ será nulo.

1.6 Diferenças Fundamentais entre os Movimentos no Plano e no Espaço

Os movimentos no plano são caracterizados por rotações consecutivas sempre em torno dos mesmos eixos, por exemplo, Z, Z_1, Z_2, \dots

$${}_1\dot{\theta}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} \quad {}_{B_1}\dot{\theta}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad {}_{B_2}\dot{\theta}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} \quad \dots \quad {}_{B_{n-1}}\dot{\theta}_n = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_n \end{Bmatrix}$$

As matrizes de transformação de coordenadas, quando estas rotações são sempre positivas, guardam a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\theta_1} &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}_{B_1}\mathbf{s} &= \mathbf{T}_{\theta_1} \cdot {}_1\mathbf{s} \\ \mathbf{T}_{\theta_2} &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}_{B_2}\mathbf{s} &= \mathbf{T}_{\theta_2} \cdot {}_{B_1}\mathbf{s} \\ \mathbf{T}_{\theta_3} &= \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}_{B_3}\mathbf{s} &= \mathbf{T}_{\theta_3} \cdot {}_{B_2}\mathbf{s} \\ \mathbf{T}_{\theta_n} &= \begin{bmatrix} \cos\theta_n & \sin\theta_n & 0 \\ -\sin\theta_n & \cos\theta_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}_{B_n}\mathbf{s} &= \mathbf{T}_{\theta_n} \cdot {}_{B_{n-1}}\mathbf{s} \end{aligned}$$

A transformação de coordenadas da base inercial I para a última base móvel B_n fica dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta_n & \sin\theta_n & 0 \\ -\sin\theta_n & \cos\theta_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) & \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) & 0 \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, as velocidades angulares absolutas das bases $B_1, B_2, B_3 \dots B_n$ representadas no sistema inercial serão:

$${}_I\omega_1 = {}_I\dot{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}_I\omega_2 = {}_I\dot{\theta}_1 + \mathbf{T}_{\theta_1}^T \cdot {}_{B_1}\dot{\theta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$${}_I\omega_3 = {}_I\dot{\theta}_1 + \mathbf{T}_{\theta_1}^T \cdot {}_{B_1}\dot{\theta}_2 + \mathbf{T}_{\theta_2}^T \cdot \mathbf{T}_{\theta_1}^T \cdot {}_{B_2}\dot{\theta}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$${}_I\omega_n = {}_I\dot{\theta}_1 + \mathbf{T}_{\theta_1}^T \cdot {}_{B_1}\dot{\theta}_2 + \mathbf{T}_{\theta_2}^T \cdot \mathbf{T}_{\theta_1}^T \cdot {}_{B_2}\dot{\theta}_3 + \dots + \mathbf{T}_{\theta_{n-1}}^T \cdot \mathbf{T}_{\theta_{n-2}}^T \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_{\theta_{n-1}}^T \cdot {}_{B_{n-1}}\dot{\theta}_n =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dots + \dot{\theta}_n \end{bmatrix}$$

Assim, observa-se que, *no plano*, as rotações angulares ocorrem sempre na mesma direção, no caso no eixo Z , podendo ser somadas diretamente. Se as *rotações angulares* $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dots, \dot{\theta}_n$ forem *constantes*, as *acelerações angulares* das bases $B_1, B_2, B_3 \dots B_n$, ou seja, ${}_I\omega_1, {}_I\omega_2, {}_I\omega_3, \dots, {}_I\omega_n$ serão todas *nulas*.

Nos movimentos espaciais, as rotações ocorrem sucessivamente em eixos diferentes, ou seja, ora em Z , ora em Y e ora em X . Naturalmente, se essas rotações são consecutivas, ora elas ocorrem em Z , ora em Y , ora em X , expressando-se mais precisamente. Imagine, como exemplo, três rotações consecutivas: a primeira $\dot{\theta}_1$ em torno de Z (inercial), a segunda em torno de X_1 (base B_1) e a terceira em torno de Z_2 (base B_2). As respectivas rotações podem, então, ser descritas vetorialmente da seguinte forma:

$${}_1\dot{\theta}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} \quad {}_{B1}\dot{\theta}_2 = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}_{B2}\dot{\theta}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix}$$

As matrizes de transformação de coordenadas, quando estas rotações são sempre positivas, guardam a seguinte estrutura:

$$\mathbf{T}_{\theta_1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}_{B1}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\theta_1} \cdot {}_1\mathbf{s}$$

$$\mathbf{T}_{\theta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ 0 & -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \quad {}_{B2}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\theta_2} \cdot {}_{B1}\mathbf{s}$$

$$\mathbf{T}_{\theta_3} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}_{B3}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\theta_3} \cdot {}_{B2}\mathbf{s}$$

Assim, as velocidades angulares absolutas das bases $B1$, $B2$ e $B3$ representadas no sistema inercial serão:

$${}_1\omega_1 = {}_1\dot{\theta}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix}$$

$${}_1\omega_2 = {}_1\dot{\theta}_1 + \mathbf{T}_{\theta_1}^T \cdot {}_{B1}\dot{\theta}_2 = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \cos\theta_1 \\ \dot{\theta}_2 \sin\theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix}$$

$${}_1\omega_3 = {}_1\dot{\theta}_1 + \mathbf{T}_{\theta_1}^T \cdot {}_{B1}\dot{\theta}_2 + \mathbf{T}_{\theta_1}^T \cdot \mathbf{T}_{\theta_2}^T \cdot {}_{B2}\dot{\theta}_3 = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \cos\theta_1 + \dot{\theta}_3 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \sin\theta_1 - \dot{\theta}_3 \cos\theta_1 \sin\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 \cos\theta_2 \end{Bmatrix}$$

Nota-se, então, que aparecem não só termos nas coordenadas Z e X , como também na coordenada Y . É importante observar que, no movimento espacial, mesmo as velocidades angulares $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ e $\dot{\theta}_3$ sendo constantes, ou seja, $\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_3 = 0$, existirão acelerações angulares dos respectivos sistemas $B2$ e $B3$. No exemplo em questão, ${}_1\dot{\omega}_2$ e ${}_1\dot{\omega}_3$ são diferentes de zero, como é calculado a seguir:

$${}_1\dot{\omega}_1 = \frac{d}{dt}({}_1\omega_1) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_1\dot{\omega}_2 = \frac{d}{dt}({}_1\omega_2) = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \\ \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_1\dot{\omega}_3 = \frac{d}{dt}({}_1\omega_3) = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 \sin\theta_2 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 \sin\theta_2 - \dot{\theta}_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \\ -\dot{\theta}_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \end{Bmatrix}$$

As acelerações angulares absolutas dos sistemas B2 e B3 aparecem pelo fato de os vetores de velocidade angular estarem variando em termos de direção. A direção do vetor ${}_m\dot{\theta}_2$ varia com uma velocidade angular que depende tanto de ${}_1\dot{\theta}_1$ quanto de ${}_m\dot{\theta}_2$.

1.7 Cinética de Partículas

CINÉTICA ou DINÂMICA é a parte da mecânica responsável pelo estudo dos movimentos, focalizando suas causas e origem, ou, seja, as forças.

A teoria de Dinâmica de Partículas apresentada a seguir baseia-se, fundamentalmente, nas três leis de Newton:

- Primeira Lei (Inércia): Se nenhuma força externa for aplicada sobre uma partícula, esta manterá sua quantidade de movimento linear constante, ou seja, ${}_1\mathbf{J}_A = m \cdot {}_1\mathbf{v}_A = cte$. Caso a mesma esteja parada, ela continuará parada. Caso ela tenha uma velocidade inicial ${}_1\mathbf{v}_A$, esta não se alterará.
- Segunda Lei (Variação da Quantidade de Movimento Linear): A segunda lei de Newton afirma que a quantidade de movimento linear de uma partícula só poderá ser alterada mediante a aplicação de forças externas, ou seja:

$$\sum_{i=1}^n {}_iF_i = \frac{d}{dt}({}_1\mathbf{J}_A) = \frac{d}{dt}(m \cdot {}_1\mathbf{v}_A) = \dot{m} \cdot {}_1\mathbf{v}_A + m \cdot {}_1\dot{\mathbf{v}}_A = \underbrace{\dot{m} \cdot {}_1\mathbf{v}_A}_{=0} + m \cdot {}_1\mathbf{a}_A = m \cdot {}_1\mathbf{a}_A$$

Ressalta-se que, na maioria dos problemas apresentados aqui, a taxa de variação de massa \dot{m} [kg/s] é nula, reduzindo a expressão anterior a

$$\sum_{i=1}^n {}_iF_i = m \cdot {}_1\mathbf{a}_A \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n {}_{B_i}F_i = m \cdot {}_{B_i}\mathbf{a}_A$$

Vale a pena destacar que a aceleração linear absoluta da partícula é calculada com base nas relações geométricas dos possíveis movimentos executados pela partícula, os quais devem sempre respeitar as condições de vínculo (cinemática). Esta aceleração poderá ser representada tanto no sistema inercial I quanto no sistema móvel Bv . Importante é que a aceleração calculada seja a aceleração linear absoluta,

- Terceira Lei (Ação e Reação): Esta lei relaciona-se com os efeitos de ação e reação estudados extensivamente durante o curso de Estática. Esta lei torna possível a construção dos diagramas de corpo livre.

A análise dos diagramas de corpo livre (ação e reação) associada à equação de equilíbrio dinâmico (segunda lei) conduzem a um conjunto de equações responsáveis por descrever a posição da partícula ao longo do tempo e as forças de reação envolvidas durante seu movimento.

Destaca-se aqui que o posicionamento da partícula ao longo do tempo é calculado com o auxílio das equações de movimento, ou seja, equações diferenciais de segunda ordem, as quais podem ser lineares ou não-lineares. Estas equações diferenciais tomam aqui sempre a forma $\ddot{x}(t) = F(x(t); \dot{x}(t))$ e são resolvidas em função das condições iniciais de movimento $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. Quando estas equações diferenciais forem lineares, métodos analíticos para a resolução das mesmas poderão ser empregados. Quando forem não-lineares, faz-se necessário, na grande maioria dos casos, a utilização de aproximações numéricas.

Para cada partícula movimentando-se no espaço obtêm-se três equações de movimento nas três direções ortogonais X , Y e Z . A partir do momento em que se restringe o movimento da partícula em uma dada direção, substitui-se uma equação de movimento por uma equação de reação, pois a restrição ao movimento é imposta através da aplicação de uma força (reação), a qual varia geralmente em função do tempo, da posição e da velocidade da partícula. Daí o termo *reação dinâmica*.

1.8 Exemplos Conceituais Resolvidos

1.8.1 Partícula Deslizando em um Cano Rotativo sem Atrito

Exemplo 8

O objetivo deste exemplo é deixar clara a seqüência de passos para a obtenção de equações de movimento para partículas. No caso em questão, a partícula se desloca sobre um cano girando com velocidade angular constante ω . Para determinar o movimento da partícula é necessário resolver a equação de movimento, que na maioria dos casos são equações diferenciais não lineares de segunda ordem. Há 2 maneiras de solucioná-las: analítica ou numericamente. Neste exemplo mostra-se como resolvê-la das duas maneiras, comparando-se os resultados.

Toda a resolução deste exemplo será feita na base móvel, pois o movimento da partícula A é medido no sistema móvel de referência, ou seja, $x(t)$. As forças normais também são mais facilmente representadas no sistema móvel, pois são perpendiculares à superfície do cano rotativo.

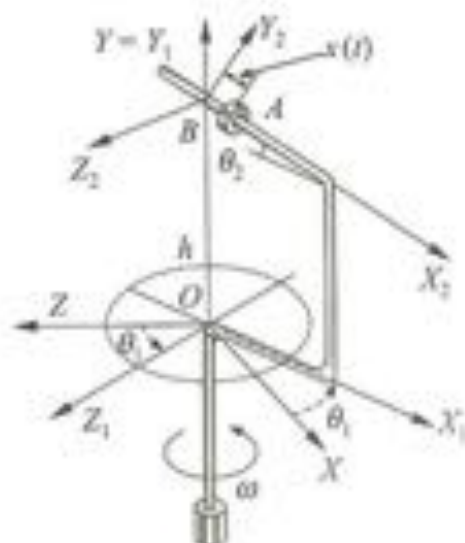


Figura 1.23

Canal inclinado girando com velocidade angular constante $\dot{\theta}_1 = \omega$ e partícula A se deslocando sobre o mesmo.

Resolução:

(a) *Definição dos sistemas de referência:*

Sistema de referência inercial I , X - Y - Z , representado pelos cursores \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} (origem O).

Sistema de referência móvel $B1$, X_1 - Y_1 - Z_1 , representado pelos cursores \mathbf{i}_1 , \mathbf{j}_1 , \mathbf{k}_1 (origem O).

Sistema de referência móvel $B2$, X_2 - Y_2 - Z_2 , representado pelos cursores \mathbf{i}_2 , \mathbf{j}_2 , \mathbf{k}_2 (origem B).

(b) *Matrizes de transformação de coordenadas:*

A primeira rotação ocorre em torno do eixo Y . O sistema móvel $B1$ gira em relação à base inercial com uma velocidade angular $\dot{\theta}_1$.

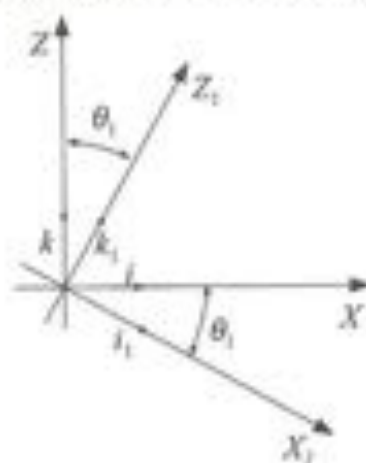


Figura 1.24

Rotação positiva do sistema $B1$ em torno do eixo Y .

$$\mathbf{i}_1 = \cos\theta_1 \mathbf{i} + 0\mathbf{j} - \sin\theta_1 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j}_1 = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{k}_1 = \sin\theta_1 \mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \cos\theta_1 \mathbf{k}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{k}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix}$$

$${}_{01}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\theta_1} \mathbf{s} \quad \text{ou} \quad \mathbf{s} = \mathbf{T}_{\theta_1}^T {}_{01}\mathbf{s}$$

A segunda rotação ocorre em torno do eixo Z_1 . O sistema móvel B_2 gira até o ângulo θ_2 atingir um valor fixo. Isto significa que $\dot{\theta}_2 = 0$.

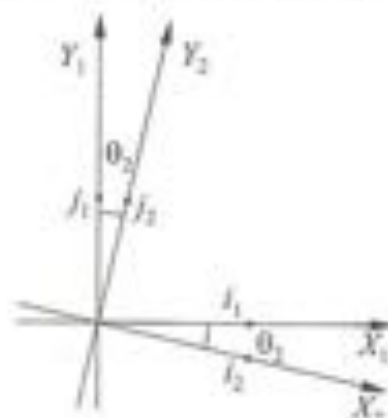


Figura 1.25
Rotação negativa do sistema B_2 em torno de Z_1 .

$$\mathbf{i}_2 = \cos\theta_2 \mathbf{i}_1 - \sin\theta_2 \mathbf{j}_1 + 0\mathbf{k}_1$$

$$\mathbf{j}_2 = \sin\theta_2 \mathbf{i}_1 + \cos\theta_2 \mathbf{j}_1 + 0\mathbf{k}_1$$

$$\mathbf{k}_2 = 0\mathbf{i}_1 + 0\mathbf{j}_1 + 1\mathbf{k}_1$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{j}_2 \\ \mathbf{k}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{k}_1 \end{Bmatrix}$$

$${}_{12}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\theta_2} {}_{01}\mathbf{s} \quad \text{ou} \quad \mathbf{s} = \mathbf{T}_{\theta_2}^T {}_{12}\mathbf{s}$$

(c) Velocidade e aceleração angular da base B_2 :

O sistema B_2 apresenta duas rotações; a primeira delas ocorre em torno do eixo Y (sistema inercial I) e a segunda em torno do eixo Z_1 (sistema B_1):

Primeira rotação

$${}_1\dot{\theta}_1 = {}_1\omega_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Segunda rotação

$${}_{B1}\dot{\theta}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{pois o cabo não é flexível.}$$

Assim, pode-se escrever a velocidade angular absoluta do sistema B2 somando-se essas duas velocidades. Lembre-se, no entanto, de que as duas rotações são realizadas em bases (ou sistemas de referência) diferentes, e a sua representação deve ser feita no sistema B2. Assim, antes destas serem diretamente somadas, precisam ser transformadas para uma base comum, no caso a base B2:

$${}_{B2}\omega = \mathbf{T}_{B_2, B_1} \mathbf{T}_{B_1, 1} \dot{\theta}_1 + \mathbf{T}_{B_2, B1} \dot{\theta}_2 = \begin{Bmatrix} -\omega \sin \theta_2 \\ \omega \cos \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [\text{rad/s}]$$

A aceleração angular é

$${}_{B2}\dot{\omega} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [\text{rad/s}^2], \text{ pois } \ddot{\theta}_1 = 0 \quad \ddot{\theta}_2 = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{\theta}_2 = 0$$

(d) Grandezas escritas de forma vetorial:

Distância da origem do sistema inercial O até o ponto onde o sistema móvel de referência B2 foi posicionado:

$${}_1\mathbf{r}_{OB} = \begin{Bmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad {}_{B2}\mathbf{r}_{OB} = \mathbf{T}_{B_2, B_1} \mathbf{T}_{B_1, 1} \mathbf{r}_{OB} = \begin{Bmatrix} -h \sin \theta_2 \\ h \cos \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Distância da origem do sistema móvel de referência até o ponto, cujo movimento será analisado:

$${}_{B2}\mathbf{r}_{BA} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Cálculo da velocidade e da aceleração relativa:

$${}_{B2}\mathbf{v}_{B01} = \frac{d}{dt}({}_{B2}\mathbf{r}_{B01}) = \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}_{B2}\mathbf{a}_{B01} = \frac{d^2}{dt^2}({}_{B2}\mathbf{r}_{B01}) = \begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A aceleração absoluta da partícula A é calculada através da Equação 1.5, representando o vetor resultante na base B2 (ou sistema de referência móvel B2):

$${}_{B2}\mathbf{a}_A = {}_{B2}\mathbf{a}_B + {}_{B2}\boldsymbol{\omega} \times ({}_{B2}\boldsymbol{\omega} \times {}_{B2}\mathbf{r}_{B01}) + {}_{B2}\dot{\boldsymbol{\omega}} \times {}_{B2}\mathbf{r}_{B01} + 2 \cdot {}_{B2}\boldsymbol{\omega} \times {}_{B2}\mathbf{v}_{B01} + {}_{B2}\mathbf{a}_{B01}$$

Calculando-se os cinco termos do lado direito da equação da aceleração tem-se:

$${}_{B2}\mathbf{a}_B = {}_{B2}\boldsymbol{\omega} \times ({}_{B2}\boldsymbol{\omega} \times {}_{B2}\mathbf{r}_{B00}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ -\omega \sin \theta_2 & \omega \cos \theta_2 & 0 \\ -h \sin \theta_2 & h \cos \theta_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{vetores paralelos!})$$

$${}_{B2}\boldsymbol{\omega} \times ({}_{B2}\dot{\boldsymbol{\omega}} \times {}_{B2}\mathbf{r}_{B01}) = {}_{B2}\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ -\omega \sin \theta_2 & \omega \cos \theta_2 & 0 \\ x(t) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ -\omega \sin \theta_2 & \omega \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -x(t)\omega \cos \theta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -x(t)\omega^2 \cos^2 \theta_2 \\ -x(t)\omega^2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_{B2}\dot{\boldsymbol{\omega}} \times {}_{B2}\mathbf{r}_{B01} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$2 \cdot {}_{B2}\boldsymbol{\omega} \times {}_{B2}\mathbf{v}_{B01} = 2 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ -\omega \sin \theta_2 & \omega \cos \theta_2 & 0 \\ \dot{x}(t) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\dot{x}(t)\omega \cos \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$${}_{B2}\mathbf{a}_{B01} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Somando-se todos os cinco termos, pois estão representados no mesmo sistema de coordenadas, no caso B2, tem-se:

$${}_{B2}\mathbf{a}_A = \begin{Bmatrix} -x(t)\omega^2 \cos^2 \theta_2 \\ -x(t)\omega^2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\dot{x}(t)\omega \cos \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}_{B2}\mathbf{a}_A = \begin{Bmatrix} -x(t)\omega^2 \cos^2 \theta_2 + \ddot{x}(t) \\ -x(t)\omega^2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 \\ -2\dot{x}(t)\omega \cos \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Termina aqui toda a análise da cinemática do movimento, ou seja, todos os cálculos de velocidade e aceleração da partícula em função da geometria do sistema mecânico, respeitando todos os vínculos físicos. Inicia-se, então, o cálculo das forças atuantes sobre a partícula, forças estas que determinarão o movimento. Ressalta-se aqui que estes movimentos precisarão sempre respeitar os vínculos cinemáticos.

Segundo Newton, a somatória de todas as forças atuantes sobre uma partícula resulta na variação da quantidade de movimento da mesma, ou seja:

$$\sum_{i=1}^n {}_I\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt}({}_I\mathbf{I}_A) = \frac{d}{dt}(m \cdot {}_I\mathbf{v}_A) = \dot{m} \cdot {}_I\mathbf{v}_A + m \cdot \dot{{}_I\mathbf{v}_A} = \underbrace{\dot{m} \cdot {}_I\mathbf{v}_A}_{=0} + m \cdot {}_I\mathbf{a}_A = m \cdot {}_I\mathbf{a}_A$$

Passando a representação dos vetores de força e aceleração para a base móvel B2, base na qual o vetor de aceleração absoluta ${}_{B2}\mathbf{a}_A$ foi descrito, tem-se:

$$\mathbf{T}_{0,1}\mathbf{T}_{0,2} \sum_{i=1}^n {}_I\mathbf{F}_i = m \cdot \mathbf{T}_{0,2}\mathbf{T}_{0,1} {}_I\mathbf{a}_A \Rightarrow \sum_{i=1}^n {}_{B2}\mathbf{F}_i = m \cdot {}_{B2}\mathbf{a}_A \quad (1.23)$$

em que $n = 2$ representa o número de forças que atuam sobre a partícula, sendo estas as forças peso e normal.

Isto significa que a somatória de todos os vetores de força atuantes sobre a partícula A, representados no sistema móvel B2, é igual à massa da partícula multiplicada por sua aceleração absoluta, devendo este vetor de aceleração também ser representado no sistema móvel B2. Ressalta-se aqui que, desta forma, nenhuma derivada foi realizada no sistema móvel, ou melhor, ${}_{B2}\mathbf{a}_A$ é o vetor de aceleração absoluta da partícula, simplesmente representado no sistema móvel B2.

(f) DCL – diagrama de corpo livre da partícula:

As forças normais que a superfície do cano aplica à partícula A são representadas na Figura 1.26 e descritas matematicamente através da equação:

$${}_{B2}\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}$$

A força peso, por sua vez, é representada no sistema inercial:

$${}_I\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix}$$

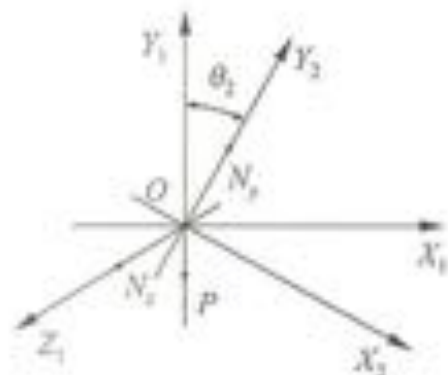


Figura 1.26
DCL – forças atuantes sobre a partícula A.

A força de atrito também pode ser representada na base móvel B2, na direção em que o movimento acontece (eixo X2). Mas, no caso em questão, será negligenciada, supondo o atrito entre a partícula e o cano muito pequeno, $\mu = 0$:

$${}_{B2}\mathbf{F}_{\text{atrito}} = \begin{bmatrix} -\mu\sqrt{N_1^2 + N_2^2} \cdot \text{sign}(\dot{x}(t)) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A força peso precisa ser descrita no sistema móvel B2. Fazendo-se uso das matrizes de transformação de coordenadas:

$${}_{B2}\mathbf{P} = \mathbf{T}_{B2, B1} \mathbf{T}_{B1, A} {}_A\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mg \sin\theta_2 \\ -mg \cos\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(g) Equilíbrio dinâmico:

Substituindo-se as expressões de força e aceleração na Equação 1.23 tem-se:

$${}_{B2}\mathbf{N} + {}_{B2}\mathbf{P} = m \cdot {}_{B2}\mathbf{a}_A$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mg \sin\theta_2 \\ -mg \cos\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} -x(t)\omega^2 \cos^2\theta_2 + \ddot{x}(t) \\ -x(t)\omega^2 \cos\theta_2 \sin\theta_2 \\ -2\dot{x}(t)\omega \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

Resultam-se daqui, então, três equações: 1 equação de movimento e 2 equações de reação, ou seja:

• Equação de movimento:

$$x \sin\theta_2 = -x(t)\omega^2 \cos^2\theta_2 + \ddot{x}(t) \quad (1.24)$$

• Equações para as forças de reação:

$$N_1 - mg \cos\theta_2 = -mx(t)\omega^2 \cos\theta_2 \sin\theta_2 \quad (1.25)$$

$$N_2 = -2m\dot{x}(t)\omega \cos\theta_2 \quad (1.26)$$

Característica marcante das equações de movimento: são geralmente equações diferenciais de segunda ordem, podendo ser lineares ou não-lineares. As equações diferenciais não-lineares dificilmente apresentam solução analítica, e na maioria dos casos são tratadas numericamente. Solucionando-as, torna-se possível analisar o tipo de movimento realizado pela partícula. A partir delas torna-se também possível obter o valor das forças de reação, as quais dependerão tanto do tempo quanto da posição da partícula.

Há duas maneiras de solucioná-las: analítica ou numericamente. A seguir resolvem-se as mesmas analítica e numericamente.

(h) Solução analítica ou exata:

A solução geral da equação diferencial linear de segunda ordem:

$$\ddot{x} - \omega^2 \cos^2 \theta_2 x = g \sin \theta_2$$

será sempre composta pela soma da solução homogênea e da solução particular, ou seja:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

A solução homogênea $x_h(t)$ está associada à equação:

$$\ddot{x}_h(t) - \omega^2 \cos^2 \theta_2 x_h(t) = 0 \quad (1.27)$$

Sapendo-se como solução homogênea uma função exponencial, tem-se:

$$x_h(t) = Ce^{\lambda t}, \quad \dot{x}_h(t) = \lambda Ce^{\lambda t}, \quad \ddot{x}_h(t) = \lambda^2 Ce^{\lambda t}$$

Substituindo estas expressões na Equação 1.27, tem-se:

$$\lambda^2 Ce^{\lambda t} - \omega^2 \cos^2 \theta_2 Ce^{\lambda t} = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - \omega^2 \cos^2 \theta_2) Ce^{\lambda t} = 0$$

Dessa equação obtêm-se duas raízes, a saber:

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - \omega^2 \cos^2 \theta_2) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \omega \cos \theta_2 \quad \lambda_2 = -\omega \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Assim, a solução homogênea fica sendo:

$$\Rightarrow x_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{\omega t \cos \theta_2} + C_2 e^{-\omega t \cos \theta_2}$$

A solução particular, no caso de um sistema linear, é relativamente simples: caso a excitação seja uma constante, a resposta do sistema também será uma constante. Caso a excitação seja uma função senoidal, a resposta também será uma senóide. Caso a excitação seja uma função parabólica, a resposta também será parabólica. Assim, neste caso, tem-se como excitação uma constante:

$$\ddot{x}_p(t) - \omega^2 \cos^2 \theta_2 x_p(t) = g \sin \theta_2 = cte. \quad (1.28)$$

Logo:

$$x_p(t) = C_3, \quad \dot{x}_p(t) = 0, \quad \ddot{x}_p(t) = 0$$

Substituindo-se os termos acima na Equação 1.28, obtém-se a solução particular:

$$-\omega^2 \cos^2 \theta_2 C_3 = g \sin \theta_2 \Rightarrow C_3 = \frac{-g \sin \theta_2}{\omega^2 \cos^2 \theta_2}$$

$$\Rightarrow x_p(t) = \frac{-g \sin \theta_2}{\omega^2 \cos^2 \theta_2}$$

A solução geral fica escrita da seguinte forma:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t} + C_3 = C_1 e^{\omega \cos \theta_2 t} + C_2 e^{-\omega \cos \theta_2 t} - \frac{g \sin \theta_2}{\omega^2 \cos^2 \theta_2}$$

Para determinar as constantes C_1 e C_2 necessita-se de informações sobre as condições iniciais do movimento, ou seja, $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. Assumindo-se como condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$, tem-se:

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{g \sin \theta_2}{\omega^2 \cos^2 \theta_2}$$

$$\dot{x}(t) = -\omega \cos \theta_2 C_1 e^{\omega \cos \theta_2 t} + \omega \cos \theta_2 C_2 e^{-\omega \cos \theta_2 t}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow -C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2$$

Logo:

$$\Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{g \sin \theta_2}{2\omega^2 \cos^2 \theta_2}$$

Substituindo-se C_1 e C_2 na equação geral (homogênea + particular), chega-se à solução para a equação de movimento, ou seja, a uma expressão para $x(t)$ em função dos parâmetros físicos conhecidos:

$$x(t) = \left(\frac{e^{\omega \cos \theta_2 t} + e^{-\omega \cos \theta_2 t}}{2} \right) \frac{g \sin \theta_2}{\omega^2 \cos^2 \theta_2} - \frac{g \sin \theta_2}{\omega^2 \cos^2 \theta_2}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{g \sin \theta_2}{\omega^2 \cos^2 \theta_2} [\cosh(\omega t \cos \theta_2) - 1] \quad (1.29)$$

Solucionada a equação de movimento para condições iniciais de movimento nulas, calculam-se as forças normais atuantes sobre a partícula através das Equações 1.25 e 1.26.

□ Cálculo da reação N_y :

$$N_y - mg \cos \theta_2 = -m \ddot{x}(t) \omega^2 \cos \theta_2 \sin \theta_2$$

$$N_y = mg \cos \theta_2 - m \left\{ \frac{g \sin \theta_2}{\omega^2 \cos^2 \theta_2} [\cosh(\omega t \cos \theta_2) - 1] \right\} \omega^2 \cos \theta_2 \sin \theta_2$$

$$\Rightarrow N_z = mg \left(\frac{\cos^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_2 [\cosh(\omega r \cos \theta_2) - 1]}{\cos \theta_2} \right) \quad (1.30)$$

□ Cálculo da reação N_z :

$$N_z = -2mi(t)\omega \cos \theta_2$$

Derivando-se a Equação 1.29 e substituindo-se $\dot{x}(t)$, tem-se

$$N_z = -2m \left(\frac{g \sin \theta_2}{\omega^2 \cos^2 \theta_2} \cdot \omega \cos \theta_2 \sinh(\omega r \cos \theta_2) \right) \cdot \omega \cos \theta_2 \quad (1.31)$$

ou seja,

$$\Rightarrow N_z = -2mg \sin \theta_2 \sinh(\omega r \cos \theta_2)$$

As Equações 1.29, 1.30 e 1.31 descrevem o comportamento dinâmico da partícula ao longo do tempo. Uma vez que os movimentos da partícula foram restringidos na direção Y_2 e Z_2 através do cano, têm-se duas equações para as reações dinâmicas, sobrando, desta forma, somente uma única equação de movimento. Esta foi solucionada analiticamente em função das condições iniciais dadas. Reforça-se, no entanto, que nem sempre é possível obter uma solução analítica exata.

(i) Solução numérica aproximada:

Ilustra-se, a seguir, como solucionar a equação de movimento aproximadamente, fazendo-se uso de aproximações por série de Taylor, ou seja:

$$F(t) = F(t_0) + \frac{dF}{dt} \Big|_{t=t_0} (t-t_0) + \frac{d^2F}{dt^2} \Big|_{t=t_0} \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots + \frac{d^n F}{dt^n} \Big|_{t=t_0} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \quad (1.32)$$

Desde que $\Delta t \ll 1$, os termos de ordem $n \geq 2$ tornam-se desprezíveis e desta forma escreve-se que

$$F(t) = F(t_0) + \frac{dF}{dt} \Big|_{t=t_0} (t-t_0) + \underbrace{\frac{d^2F}{dt^2} \Big|_{t=t_0} \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots + \frac{d^n F}{dt^n} \Big|_{t=t_0} \frac{(t-t_0)^n}{n!}}_{\text{desprezível}} \quad (1.33)$$

$$F(t) = F(t_0) + \frac{dF}{dt} \Big|_{t=t_0} (t-t_0)$$

Assim, a equação de movimento apresentada na Equação 1.24, pode ser solucionada da seguinte forma:

$$t_0 = 0 \quad x(t_0) = 0.0 \quad \dot{x}(t_0) = 0.0 \quad (\text{condições iniciais de deslocamento e velocidade})$$

Substituindo-se estas condições iniciais na equação de movimento (1.24), tem-se:

$$\ddot{x}(t_0) = g \sin \theta_2 + \omega^2 \cos^2 \theta_2 x(t_0) \quad (\text{equação diferencial de movimento})$$

Dado um $\Delta t = (t - t_0) \ll 1$, aproxima-se o comportamento da velocidade e do deslocamento por Taylor, ou seja:

$$\dot{x}(t_0 + \Delta t) = \dot{x}(t_0) + \ddot{x}(t_0) \cdot \Delta t$$

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0) \cdot \Delta t$$

Estes valores de velocidade $\dot{x}(t + \Delta t)$ e deslocamento $x(t + \Delta t)$ passam a ser as novas condições iniciais de movimento para o intervalo de tempo entre t_0 e $t_0 + \Delta t$. Substituindo-se as mesmas na equação diferencial de movimento (1.24), tem-se

$$\ddot{x}(t_0 + \Delta t) = g \sin \theta_2 + \omega^2 \cos^2 \theta_2 x(t_0 + \Delta t) \quad (\text{equação diferencial de movimento})$$

Dado mais um $\Delta t = (t - t_0) \ll 1$ aproxima-se o comportamento da velocidade e do deslocamento novamente por Taylor, ou seja,

$$\dot{x}(t_0 + 2\Delta t) = \dot{x}(t_0 + \Delta t) + \ddot{x}(t_0 + \Delta t) \cdot \Delta t$$

$$x(t_0 + 2\Delta t) = x(t_0 + \Delta t) + \dot{x}(t_0 + \Delta t) \cdot \Delta t$$

em que $\dot{x}(t_0 + \Delta t)$ e $x(t_0 + \Delta t)$ foram calculados no passo anterior. Estes valores de velocidade $\dot{x}(t + 2\Delta t)$ e deslocamento $x(t + 2\Delta t)$ passam a ser as novas condições iniciais de movimento para o novo intervalo de tempo entre $t_0 + \Delta t$ e $t_0 + 2\Delta t$. Substituindo-se os valores na equação diferencial de movimento (1.24), tem-se:

$$\ddot{x}(t_0 + 2\Delta t) = g \sin \theta_2 + \omega^2 \cos^2 \theta_2 x(t_0 + 2\Delta t) \quad (\text{equação diferencial de movimento})$$

Prosseguindo-se com os cálculos de Δt em Δt , sempre com pequenos incrementos, chega-se ao tempo total de análise do movimento $t = t_0 + n \cdot \Delta t$. Torna-se possível, então, descrever a posição da partícula ao longo do tempo, ou seja:

$$x(t_0), x(t_0 + \Delta t), x(t_0 + 2\Delta t), \dots, x(t_0 + n\Delta t).$$

A Tabela 1.1 apresenta uma comparação entre a solução exata da equação de movimento (1.29) e a aproximada pela série de Taylor. Esta foi construída com auxílio de um pequeno programa computacional mostrado no final deste exemplo. Menciona-se, aqui, que este tipo de integração numérica é conhecido na literatura como Método de Euler, ou Runge-Kutta de Primeira Ordem.

Observa-se claramente que uma redução do passo de integração Δt faz com que a solução aproximada convirja para a solução exata. Pensando-se do ponto de vista de cálculos computacionais, verifica-se que uma redução muito grande no passo de integração Δt não leva necessariamente a um aumento considerável na precisão da solução. Ao contrário, esta redução conduz em muitos casos a um aumento significativo no tempo de processamento, além de amplificar a propagação de erros de truncamento (ou arredondamento) durante as operações matemáticas efetuadas.

A Tabela 1.2 mostra que, com um $\Delta t = 10^{-8}$, o erro passa a aumentar e o tempo de processamento para a solução deste problema simples chega a 4.426 [s], ou seja, mais de uma hora e vinte minutos (= 1h14).

Tabela 1.1 Comparação entre a solução exata e a solução aproximada para diferentes valores de Δt . Valores numéricos utilizados para os cálculos: $g = 9,8$ [m/s²], $\theta_1 = \pi/4$ [rad] e $\omega = 1,0$ [rad/s]. Erro é definido como a diferença entre a solução aproximada e a solução exata, dividido pela solução exata.

Solução	Exata	Aproximada $\Delta t = 0.1$ [s]	Erro ϵ	Aproximada $\Delta t = 0.01$ [s]	Erro ϵ	Aproximada $\Delta t = 0.001$ [s]	Erro ϵ
	[m]	[m]	[%]	[m]	[%]	[m]	[%]
$x(1.0)$	3,61161859	3,98581326	10,360	3,64921123	1,041	3,61537929	0,104
$x(2.0)$	16,32879101	17,26817188	5,753	16,42353936	0,580	16,33827203	0,048
$x(3.0)$	44,77949989	46,76662277	4,438	44,98069156	0,449	44,79964188	0,045

Tabela 1.2 Comparação entre a solução exata e a solução aproximada de $x(0, 1)$ para diferentes valores de Δt , levando-se em consideração o tempo de processamento. Valores numéricos utilizados para os cálculos: $g = 9,8$ [m/s²], $\theta_1 = \pi/4$ [rad] e $\omega = 1,0$ [rad/s]. Erro é definido como a diferença entre a solução aproximada e a solução exata, dividido pela solução exata.

Δt [s]	Erro ϵ [%]	Tempo de processamento [s]
0,01	10,00036661	0,000
0,001	1,00041238	0,005
0,0001	0,10004162	0,938
0,00001	0,01000418	4,001
0,000001	0,00099654	40,943
0,0000001	0,00010687	403,388
0,00000001	0,00075138	4426,960

Uma outra análise poderia ser feita. Por exemplo, imagine que você deseja descrever a trajetória da partícula, quando a mesma é observada do sistema inercial. Para isto, basta transformar a representação dos vetores de posição para o sistema inercial com auxílio das matrizes de transformação de coordenadas. Obtém-se, através deste procedimento, a seguinte equação vetorial:

$${}_{I}r_{O_A} = {}_{I}r_{O_B} + T_{O_1, O_2}^T T_{O_2, B}^T r_{B_A}$$

$${}_{I}r_{O_A} = \begin{Bmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta_1(t) & 0 & \sin\theta_1(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_1(t) & 0 & \cos\theta_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_{I}\mathbf{r}_{OA} = \begin{Bmatrix} r_{OA_x}(t) \\ r_{OA_y}(t) \\ r_{OA_z}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x(t) \cos\theta_1(t) \cos\theta_2 \\ h - x(t) \sin\theta_2 \\ -x(t) \sin\theta_1(t) \cos\theta_2 \end{Bmatrix}$$

em que $x(t)$ é calculado através da Equação 1.29. A Figura 1.27 ilustra a órbita tridimensional realizada pela partícula, obtida quando se constrói o gráfico de $r_{OA_x}(t) \times r_{OA_y}(t) \times r_{OA_z}(t)$, levando-se em consideração as condições iniciais e os parâmetros descritos anteriormente.

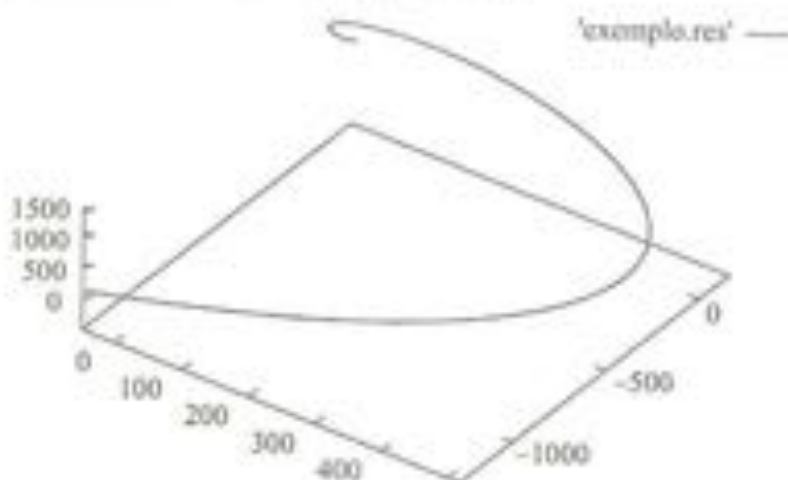


Figura 1.27
Trajetória realizada pela partícula observada a partir do sistema inercial.

(j) Programa computacional escrito em linguagem Pascal:

```

program exemplo;
uses crt;
{DEFINICAO DAS VARIAVEIS DO PROGRAMA}
var
t, tempo, deltat, w, g, h, teta1, teta2, erro : real;
X_exato, X_aprox, Xp_aprox, Xpp : real;
r_oa_x, r_oa_y, roa_z : real;
n, npontos : integer;
arq1 : text;
{INICIO DO PROGRAMA}
begin
clrscr;
{NOME DO ARQUIVO ONDE OS RESULTADOS SERAO ARMazenADOS (ORBITA)}
assign(arq1, 'exemplo.res');
{ABERTURA DOS ARQUIVOS}
rewrite(arq1);
{PARAMETROS DO MODELO}
w := 1.0; rad/s
teta2 := 3.141592654/4.0; {rad}

```



```

g := 9.8; {m/s²}
h := 1400.0; {m}
{DADOS RELACIONADOS COM A INTEGRAÇÃO NUMÉRICA}
t := 0.0; {tempo inicial em [s]}
tempo := 8.0; {tempo total de análise do movimento em [s]}
npontos := 1000; {numero total de pontos utilizados}
deltat := tempo/npontos; {passo de integração em [s]}
{CONDIÇÕES INICIAIS DE MOVIMENTO}
t := 0.0;
teta1 := 0.0;
X_aprox := 0.0;
Xp_aprox := 0.0;
X_exato := g*sin(teta2)/(w*w*cos(teta2)*cos(teta2))*
( (exp(w*cos(teta2)*t)+exp(-w*cos(teta2)*t) )/2.0-1.0);
r_oe_x := X_exato * cos(teta1) * cos(teta2);
r_oe_y := -X_exato * sin(teta2) + h;
r_oe_z := -X_exato * sin(teta1) * cos(teta2);
{CONDIÇÃO INICIAL ARMAZENADA NO ARQUIVO DE RESULTADOS (ORBITA)}
writeln(arq1,r_oe_x:2:5,' ',r_oe_y:2:5,' ', r_oe_z:2:5);
{INTEGRAÇÃO NUMÉRICA}
for n:=1 to npontos do
begin
t := t + deltat;
teta1 := teta1 + w*deltat;
{VALOR EXATO}
X_exato := g*sin(teta2)/( w*w*cos(teta2)*cos(teta2) ) *
( (exp(w*cos(teta2)*t)+exp(-w*cos(teta2)*t) )/2.0-1.0);
{EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE MOVIMENTO}
Xpp := g*sin(teta2) + w*w*cos(teta2)*cos(teta2)*X_aprox;
{APROXIMAÇÃO POR TAYLOR}
Xp_aprox := Xp_aprox + Xpp*deltat;
X_aprox := X_aprox + Xp_aprox*deltat;
{ERRO ENTRE A SOLUÇÃO ANALÍTICA E APROXIMADA}
erro := (X_aprox- X_exato)/X_exato*100.0;
{ORBITA REALIZADA PELA MASSA OBSERVADA DA BASE INERCIAL}
r_oe_x := X_exato * cos(teta1) * cos(teta2);
r_oe_y := -X_exato * sin(teta2) + h;
r_oe_z := -X_exato * sin(teta1) * cos(teta2);
{IMPRESSÃO DOS RESULTADOS COMPARATIVOS (EXATO E APROXIMADO) NA TELA}
writeln('t=',t:1:3,' dt=',deltat:1:3,' X_exato=',X_exato:2:8,
' X_aprox=',X_aprox:2:8,' erro=',erro:1:3,'%');
writeln(teta1:2:5,' ',r_oe_x:2:5,' ',r_oe_y:2:5,' ', r_oe_z:2:5);
{ORBITA ARMAZENADA NO ARQUIVO DE RESULTADOS}
writeln(arq1,r_oe_x:2:5,' ',r_oe_y:2:5,' ', r_oe_z:2:5);
end;
{FECHANDO O ARQUIVO DE RESULTADOS (ORBITA)}
close(arq1);
end

```

1.8.2 Movimento Espacial com Duas Rotações Consecutivas

Exemplo 9

O sistema mecânico mostrado na Figura 1.28 é composto pela estrutura A , pelo rotor B , pelo conjunto braço-mola com massa desprezível C e pela massa concentrada D . Três sistemas de referência são utilizados, sendo o primeiro o inercial, I , o segundo, $B1$, fixo no rotor, e o terceiro, $B2$, solidário ao conjunto braço-mola. A velocidade angular do rotor é constante e vale $\dot{\beta}$ rad/s. Em um dado instante genérico t , os ângulos β e φ são diferentes de zero, e a rotação do sistema braço-mola é dada por φ variando com $\dot{\varphi}$.

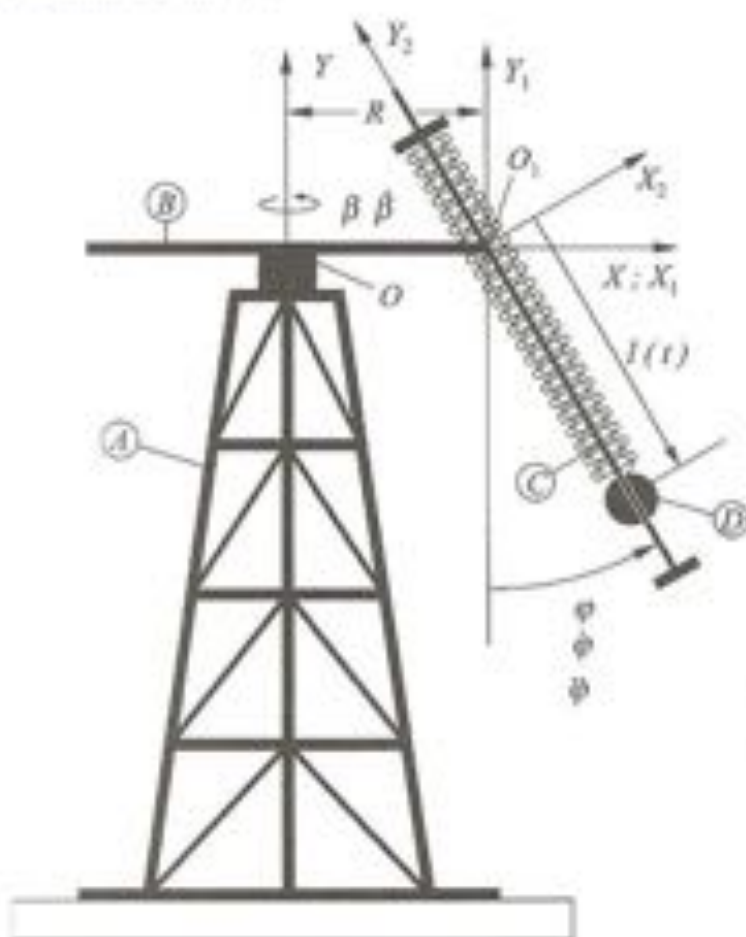


Figura 1.28
Partícula em um sistema móvel girante (duas rotações consecutivas) e deslizando devido ao acoplamento com uma mola.

- Calcule as matrizes de transformação de coordenadas dos sistemas móveis para o inercial e vice-versa.
- Determine uma expressão analítica para a velocidade angular absoluta da base $B2$, representando-a no sistema de referência $B2$.
- Em um dado instante de tempo, o braço C é travado no ponto O , e impedido de girar, ficando em uma posição φ_0 . Determine uma expressão analítica para a aceleração ab-

solta da massa D , representando-a no sistema móvel $B2$ em função dos parâmetros dados.

(d) Calcule as componentes da força normal entre a partícula e o braço C , considerando-se uma mola com constante de elasticidade linear k . O coeficiente de atrito entre a partícula e o braço é desprezível.

(e) É possível obter uma equação analítica para o movimento da massa D no sistema móvel de referência assumindo-se, como condições iniciais de movimento para partícula, $\dot{\theta}(0) = 0$ e $\dot{\phi}(0) = 0$, quando o braço está travado no ponto O_1 ?

Resolução:

Definição dos sistemas de coordenadas:

- 1 Sistema inercial I, XYZ – cursores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (origem O).
- 2 Sistema móvel $B1, X_1, Y_1, Z_1$ – cursores $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ (origem O_1).
- 3 Sistema móvel $B2, X_2, Y_2, Z_2$ – cursores $\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2$ (origem O_2).

(a) A primeira rotação ocorre no sistema inercial em torno do eixo $Y_1, \beta = [0, \beta, 0]^T$:

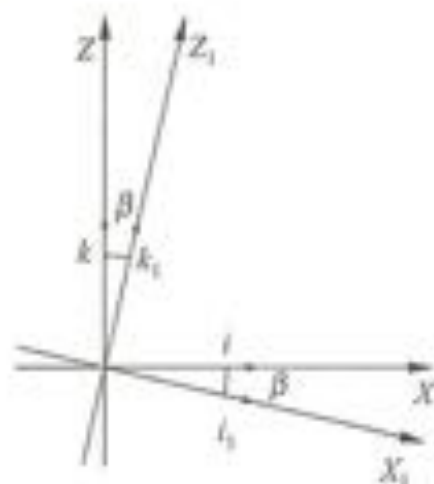


Figura 1.29
Rotação positiva em torno de Y_1 .

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{k}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix}$$

$${}_B \mathbf{s} = \mathbf{T}_\beta {}_I \mathbf{s}$$

$${}_I \mathbf{s} = \mathbf{T}_\beta^T {}_B \mathbf{s}$$

A segunda rotação ocorre no sistema $B1$ em torno do eixo $Z_1, {}_{B1} \phi = [0, 0, \phi]^T$:

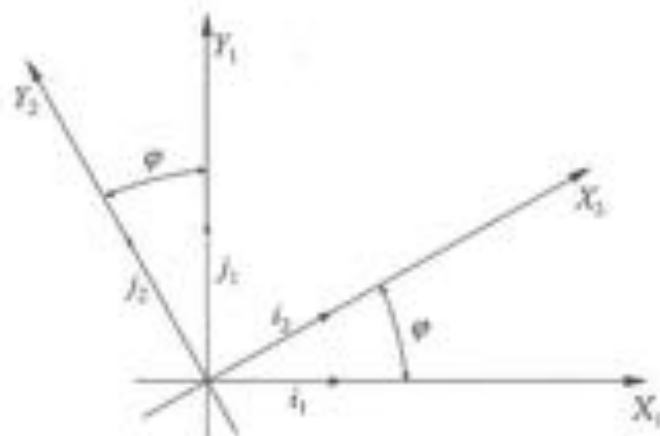


Figura 1.30
Rotação positiva em torno de Z_1 .

$$\begin{Bmatrix} i_2 \\ j_2 \\ k_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{Bmatrix}$$

$${}_{s_1} \mathbf{s} = \mathbf{T}_\varphi {}_{s_2} \mathbf{s}$$

$${}_{s_1} \mathbf{s} = \mathbf{T}_\varphi^T {}_{s_2} \mathbf{s}$$

(b) A velocidade angular absoluta do sistema móvel B2 é composta por duas rotações, β e $\dot{\varphi}$. Para escrever o vetor de velocidade angular ${}_{s_1} \omega$ é necessário que os vetores ${}_i \beta$ e ${}_{s_1} \dot{\varphi}$ sejam descritos no sistema B2, ou seja:

$$\begin{aligned} {}_{s_1} \omega &= \mathbf{T}_\varphi \cdot \mathbf{T}_\beta \cdot {}_i \beta + \mathbf{T}_\varphi \cdot {}_{s_1} \dot{\varphi} \\ {}_{s_1} \omega &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \\ &\Rightarrow {}_{s_2} \omega = \begin{Bmatrix} \beta \sin \varphi \\ \beta \cos \varphi \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

(c) Quando o braço é travado e impedido de girar em torno do ponto O_r , $\dot{\varphi} = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$. Assim:

$$\begin{aligned} {}_{s_2} \omega &= \begin{Bmatrix} \beta \sin \varphi_0 \\ \beta \cos \varphi_0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta \sin \varphi_0 \\ \beta \cos \varphi_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ {}_{s_2} \dot{\omega} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \text{pois } \dot{\beta} = 0, \dot{\varphi} = 0 \text{ e } \ddot{\varphi} = 0 \end{aligned}$$

Para o cálculo dos itens (d) e (e) escrevem-se, primeiramente, as seguintes grandezas de forma vetorial:

— Distância entre a origem do sistema inercial e a origem do sistema móvel. Vetor representado na base B_1 , pois nesta base \mathbf{R} é constante.

$${}_{B_1}\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow {}_{B_2}\mathbf{R} = \mathbf{T}_\varphi \cdot {}_{B_1}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 & 0 \\ -\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}_{B_2}\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R\cos\varphi_0 \\ -R\sin\varphi_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

— Distância entre a origem do sistema móvel até o ponto de interesse, cujo movimento deve ser analisado. Vetor representado na base B_2 .

$${}_{B_2}\mathbf{l} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -l(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

— Aceleração da massa D representada na base B_2 .

$${}_{B_2}\mathbf{a}_D = {}_{B_2}\mathbf{a}_O + {}_{B_2}\dot{\omega} \times {}_{B_2}\dot{\omega} \times {}_{B_2}\mathbf{l} + {}_{B_2}\dot{\omega} \times {}_{B_2}\mathbf{l} + 2 \cdot {}_{B_2}\dot{\omega} \times {}_{B_2}\mathbf{v}_{B_2} + {}_{B_2}\mathbf{a}_{B_2}$$

$${}_{B_2}\mathbf{a}_O = {}_{B_2}\dot{\beta} \times {}_{B_2}\dot{\beta} \times {}_{B_2}\mathbf{R} = {}_{B_2}\dot{\beta} \times \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ \dot{\beta}\sin\varphi_0 & \dot{\beta}\cos\varphi_0 & 0 \\ R\cos\varphi_0 & -R\sin\varphi_0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ \dot{\beta}\sin\varphi_0 & \dot{\beta}\cos\varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & -R\dot{\beta} \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -R\dot{\beta}^2\cos\varphi_0 \\ R\dot{\beta}^2\sin\varphi_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_{B_2}\dot{\omega} \times {}_{B_2}\dot{\omega} \times {}_{B_2}\mathbf{l} = {}_{B_2}\dot{\omega} \times \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ \dot{\beta}\sin\varphi_0 & \dot{\beta}\cos\varphi_0 & 0 \\ 0 & -l(t) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ \dot{\beta}\sin\varphi_0 & \dot{\beta}\cos\varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & -l(t)\dot{\beta}\sin\varphi_0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -l(t)\dot{\beta}^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0 \\ l(t)\dot{\beta}^2\sin^2\varphi_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_{B_2}\dot{\omega} \times {}_{B_2}\mathbf{l} = 0, \text{ pois } {}_{B_2}\dot{\omega} = 0$$

$${}_{B_2}\mathbf{v}_{B_2} = \frac{d}{dt}({}_{B_2}\mathbf{l}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dot{l}(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 2 \cdot {}_{B2}\omega \times {}_{B2}\mathbf{v}_{B0f} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ \dot{\beta} \sin \varphi_0 & \dot{\beta} \cos \varphi_0 & 0 \\ 0 & -l(t) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\dot{l}(t)\dot{\beta} \sin \varphi_0 \end{pmatrix} \\
 {}_{B2}\mathbf{a}_{B0f} &= \frac{d^2}{dt^2}({}_{B2}\mathbf{l}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\ddot{l}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow {}_{B2}\mathbf{a}_O &= \begin{pmatrix} -R\dot{\beta}^2 \cos \varphi_0 - l(t)\dot{\beta}^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \\ R\dot{\beta}^2 \sin \varphi_0 + l(t)\dot{\beta}^2 \sin^2 \varphi_0 - \ddot{l}(t) \\ -2\dot{l}(t)\dot{\beta} \sin \varphi_0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(d) Cálculo das forças normais atuantes sobre a partícula de massa m :

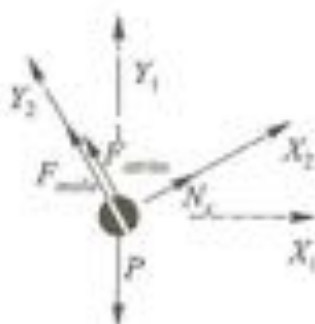


Figura 1.31
Forças atuantes sobre a massa m .

⇒ Força peso representada em I :

$${}_I\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}_{B2}\mathbf{P} = \mathbf{T}_{\varphi_0} \cdot \mathbf{T}_\beta \cdot {}_I\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -mg \sin \varphi_0 \\ -mg \cos \varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇒ Força normal representada na base $B2$:

$${}_{B2}\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_t \\ 0 \\ N_x \end{pmatrix}$$

- Força da mola representada na base B_2 :

$${}_{B_2}\mathbf{F}_{mola} = \begin{pmatrix} 0 \\ k\ell(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Força de atrito representada na base B_2 :

$${}_{B_2}\mathbf{F}_{atrito} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu\sqrt{N_x^2 + N_z^2} \cdot \text{sign}(\dot{\ell}(t)) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ pois } \mu = 0!$$

- Equilíbrio dinâmico de acordo com a 2ª lei de Newton:

$$\sum_{i=1}^4 {}_{B_2}\mathbf{F}_i = m {}_{B_2}\mathbf{a}_D = {}_{B_2}\mathbf{P} + {}_{B_2}\mathbf{N} + {}_{B_2}\mathbf{F}_{mola} + \underbrace{{}_{B_2}\mathbf{F}_{atrito}}_{=0}$$

$$\begin{pmatrix} -mg \sin \varphi_0 \\ -mg \cos \varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_x \\ 0 \\ N_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k\ell(t) \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -R\dot{\beta}^2 \cos \varphi_0 - \ell(t)\dot{\beta}^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \\ R\dot{\beta}^2 \sin \varphi_0 + \ell(t)\dot{\beta}^2 \sin^2 \varphi_0 - \ddot{\ell}(t) \\ -2\dot{\ell}(t)\dot{\beta} \sin \varphi_0 \end{pmatrix}$$

Das três equações, duas são de reações e uma de movimento.

- Reações:

$$\text{Direção } X_z: N_x = mg \sin \varphi_0 - mR\dot{\beta}^2 \cos \varphi_0 - m\ell(t)\dot{\beta}^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0$$

$$\text{Direção } Z_z: N_z = -2m\dot{\ell}(t)\dot{\beta} \sin \varphi_0$$

- Equação de movimento:

$$\text{Direção } Y_z: m\ddot{\ell}(t) + (k - m\dot{\beta}^2 \sin^2 \varphi_0)\ell(t) = m(R\dot{\beta}^2 \sin \varphi_0 + g \cos \varphi_0)$$

- (e) A equação de movimento dada anteriormente é uma equação diferencial de segunda ordem linear. Há uma solução analítica para a mesma que é dada pela soma das soluções homogênea e particular. Recordar-se que $\dot{\beta}$ e φ_0 são constantes.

- Solução homogênea:

$$m\ddot{\ell}_h(t) + (k - m\dot{\beta}^2 \sin^2 \varphi_0)\ell_h(t) = 0$$

$$\ell_h(t) = Ce^{\lambda t}, \quad \dot{\ell}_h(t) = \lambda Ce^{\lambda t}, \quad \ddot{\ell}_h(t) = \lambda^2 Ce^{\lambda t}$$

$$m\lambda^2 Ce^{\lambda t} + (k - m\dot{\beta}^2 \sin^2 \varphi_0)Ce^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} + \dot{\beta}^2 \sin^2 \varphi_0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{-\frac{k}{m} + \dot{\beta}^2 \sin^2 \varphi_0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$$

$$\Rightarrow \ell_h(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t}$$

□ Solução particular:

$$I_p(t) = C_3, \text{ pois } m(R\dot{\beta}^2 \sin \varphi_0 + g \cos \varphi_0) = \text{cte.}$$

$$\dot{I}_p(t) = 0, \quad \ddot{I}_p(t) = 0$$

Substituindo $I_p(t)$ e $\ddot{I}_p(t) = 0$ na equação diferencial, tem-se:

$$(k - m\dot{\beta}^2 \sin^2 \varphi_0)C_3 = m(R\dot{\beta}^2 \sin \varphi_0 + g \cos \varphi_0)$$

$$C_3 = \frac{m(R\dot{\beta}^2 \sin \varphi_0 + g \cos \varphi_0)}{(k - m\dot{\beta}^2 \sin^2 \varphi_0)}$$

□ Solução geral: $I(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3$

□ Condições iniciais de movimento:

$$I(0) = 0; \Rightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$\dot{I}(t) = 0 \Rightarrow C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{C_3}{2}$$

$$I(t) = -\frac{C_3}{2} e^{\lambda_1 t} - \frac{C_3}{2} e^{\lambda_2 t} + C_3 = -C_3 \left(\frac{\cosh(\lambda t)}{e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}} - 1 \right)$$

$$I(t) = \frac{-m(R\dot{\beta}^2 \sin \varphi_0 + g \cos \varphi_0)}{(k - m\dot{\beta}^2 \sin^2 \varphi_0)} \left[\cosh \left(\sqrt{-\frac{k}{m} + \dot{\beta}^2 \sin^2 \varphi_0} t \right) - 1 \right]$$

1.8.3 Movimento Espacial com Três Rotações Consecutivas

Exemplo 10

A Figura 1.32 ilustra um pêndulo simples montado na extremidade de um disco. Tanto o disco como o braço giram com uma velocidade angular constante ($\dot{\alpha}$ e $\dot{\beta}$ são constantes). O sistema inercial I tem origem em O ; o sistema móvel de referência $B1$ tem origem em B ; o sistema móvel $B2$ tem origem em C e o sistema móvel $B3$ tem origem em D . O sistema $B1$ é solidário ao braço rotativo de comprimento b , o sistema $B2$ é solidário ao disco rotativo e o sistema $B3$ é solidário à haste do pêndulo de comprimento l . O sistema I é representado pelos eixos XYZ e cursores \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} . O sistema mó-

vel B1 é representado pelos eixos X_1, Y_1, Z_1 e cursores $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$; B2 pelos eixos X_2, Y_2, Z_2 e cursores $\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2$; B3 pelos eixos X_3, Y_3, Z_3 e cursores $\mathbf{i}_3, \mathbf{j}_3, \mathbf{k}_3$.

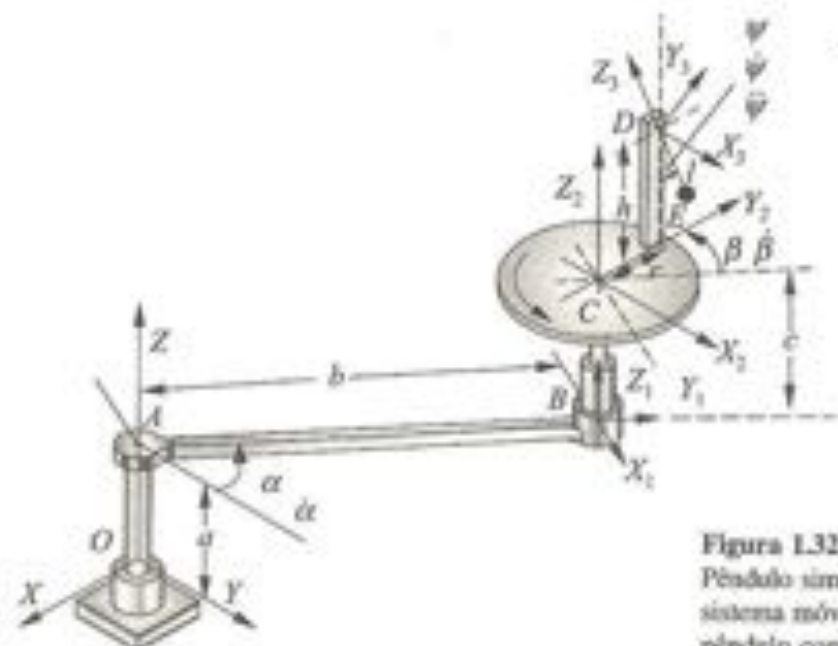


Figura 1.32
Pêndulo simples montado em um sistema móvel rotativo – massa do pêndulo com três rotações consecutivas.

Pede-se:

- Calcule as matrizes de transformação de coordenadas do sistema inercial I para o sistema móvel B1, do móvel B1 para o móvel B2 e do B2 para o B3. Ressalta-se que B1 está fixa no braço, B2, no disco e B3, na haste do pêndulo.
- Determine a velocidade angular absoluta dos sistemas B1, B2 e B3 representando-os, respectivamente, com o auxílio das bases B1, B2 e B3, ou seja, ${}_{B1}\omega_1$, ${}_{B2}\omega_2$ e ${}_{B3}\omega_3$.
- Determine a aceleração angular absoluta dos sistemas B1, B2 e B3, ou seja, ${}_{B1}\dot{\omega}_1$, ${}_{B2}\dot{\omega}_2$ e ${}_{B3}\dot{\omega}_3$.
- Determine a aceleração linear absoluta da massa m do pêndulo (partícula E), representando-a com o auxílio da base B3, ou seja, ${}_{B3}\mathbf{a}_E$.
- Determine a aceleração linear absoluta do ponto C (centro do disco), representando-a com o auxílio da base B2, ou seja, ${}_{B2}\mathbf{a}_C$.
- Determine a aceleração linear absoluta do ponto B (extremidade do braço), representando-a com o auxílio da base B1, ou seja, ${}_{B1}\mathbf{a}_B$.
- Desenhe as forças atuantes sobre a partícula E, representando-as com o auxílio da base mais conveniente, e construa o diagrama de corpo livre da partícula.
- Escreva as equações que descrevem o equilíbrio dinâmico da partícula. Qual o resultado proveniente deste equilíbrio?

Veja no CD a animação dos movimentos realizados pela partícula E para diferentes condições iniciais de movimento e de operação do braço e disco rotativos.

Resolução:

(a) *Matrizes de transformação de coordenadas.*

Do sistema inercial I para o sistema de referência móvel B1:



Figura 1.33
Primeira rotação em torno do eixo Z (inercial) – veja animação no CD.

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} {}_{B1}\mathbf{s} &= \mathbf{T}_\alpha \cdot {}_I\mathbf{s} \\ {}_I\mathbf{s} &= \mathbf{T}_\alpha^T \cdot {}_{B1}\mathbf{s} \end{aligned}$$

Do sistema móvel B1 para o sistema móvel B2:



Figura 1.34
Segunda rotação consecutiva em torno do eixo Z1 – veja animação no CD.

$$\mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} {}_{B2}\mathbf{s} &= \mathbf{T}_\beta \cdot {}_{B1}\mathbf{s} \\ {}_{B1}\mathbf{s} &= \mathbf{T}_\beta^T \cdot {}_{B2}\mathbf{s} \end{aligned}$$

Do sistema móvel B2 para o sistema móvel B3:



Figura 1.35

Terceira rotação consecutiva em torno do eixo X_1 – veja animação no CD.

$$\mathbf{T}_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} {}_{B1}\mathbf{s} &= \mathbf{T}_\psi \cdot {}_{B2}\mathbf{s} \\ {}_{B2}\mathbf{s} &= \mathbf{T}_\psi^T \cdot {}_{B1}\mathbf{s} \end{aligned}$$

(b) *Velocidades angulares absolutas dos sistemas móveis de referência:*

- ▮ *Velocidade angular absoluta do sistema móvel B1, representada com auxílio da base B1:*

$${}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{T}_{\alpha 1} \dot{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \Rightarrow {}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} [\text{rad} / \text{s}]$$

- ▮ *Velocidade angular absoluta do sistema móvel B2, representada com auxílio da base B2:*

$$\begin{aligned} {}_{B2}\boldsymbol{\omega}_2 &= \mathbf{T}_\beta \mathbf{T}_{\alpha 1} \dot{\alpha} + \mathbf{T}_\beta \dot{\beta} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \\ {}_{B2}\boldsymbol{\omega}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} + \dot{\beta} \end{bmatrix} [\text{rad} / \text{s}] \end{aligned}$$

- ▮ *Velocidade angular absoluta do sistema móvel B3, representada com auxílio da base B3:*

$${}_{B3}\boldsymbol{\omega}_3 = \mathbf{T}_\psi \mathbf{T}_\beta \mathbf{T}_{\alpha 1} \dot{\alpha} + \mathbf{T}_\psi \mathbf{T}_\beta \dot{\beta} + \mathbf{T}_\psi \dot{\psi}$$

$$= \mathbf{T}_\psi (\mathbf{}_{B2}\dot{\omega}_2 + \mathbf{}_{B2}\dot{\psi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ 0 \\ \dot{\alpha} + \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\sin\psi \\ (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\cos\psi \end{bmatrix} \quad [\text{rad/s}]$$

(c) Acelerações angulares absolutas dos sistemas móveis, de acordo com a Equação 1.22.

□ Aceleração angular absoluta do sistema móvel B1, representado com auxílio da base B1:

$$\mathbf{}_{B1}\dot{\omega}_1 = \frac{d}{dt}(\mathbf{}_{B1}\omega_1) + \underbrace{\mathbf{}_{B1}\omega_1 \times \mathbf{}_{B1}\omega_1}_{=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{}_{B1}\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [\text{rad/s}^2]$$

□ Aceleração angular absoluta do sistema móvel B2, representada com auxílio da base B2:

$$\mathbf{}_{B2}\dot{\omega}_2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{}_{B2}\omega_2) + \underbrace{\mathbf{}_{B2}\omega_2 \times \mathbf{}_{B2}\omega_2}_{=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\alpha} + \ddot{\beta} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{}_{B2}\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [\text{rad/s}^2]$$

□ Aceleração angular absoluta do sistema móvel B3, representada com auxílio da base B3:

$$\mathbf{}_{B3}\dot{\omega}_3 = \frac{d}{dt}(\mathbf{}_{B3}\omega_3) + \underbrace{\mathbf{}_{B3}\omega_3 \times \mathbf{}_{B3}\omega_3}_{=0} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta})\sin\psi + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\dot{\psi}\cos\psi \\ (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta})\cos\psi - (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\dot{\psi}\sin\psi \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{}_{B3}\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\dot{\psi}\cos\psi \\ -(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\dot{\psi}\sin\psi \end{bmatrix} \quad [\text{rad/s}^2]$$

Chama-se a atenção para o fato de $\ddot{\alpha} = \ddot{\beta} = 0$

(d) Aceleração linear absoluta da massa m (partícula E), representada com auxílio da base B3:

$$\mathbf{}_{B3}\mathbf{a}_E = \underbrace{\mathbf{}_{B3}\mathbf{a}_D}_{(I)} + \underbrace{\mathbf{}_{B3}\omega_3 \times \mathbf{}_{B3}\omega_3 \times \mathbf{}_{B3}\mathbf{r}_{DE}}_{(II)} + \underbrace{\mathbf{}_{B3}\dot{\omega}_3 \times \mathbf{}_{B3}\mathbf{r}_{DE}}_{(III)} + 2 \cdot \underbrace{\mathbf{}_{B3}\omega_3 \times \mathbf{}_{B3}\mathbf{v}_{Rel}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{}_{B3}\mathbf{a}_{Rel}}_{=0}$$

□ (I)

$$\mathbf{}_{B2}\mathbf{a}_D = \underbrace{\mathbf{}_{B2}\mathbf{a}_C}_{\text{vide item (c)}} + \underbrace{\mathbf{}_{B2}\omega_2 \times \mathbf{}_{B2}\omega_2 \times \mathbf{}_{B2}\mathbf{r}_{CD}}_{(IV)} + \underbrace{\mathbf{}_{B2}\dot{\omega}_2 \times \mathbf{}_{B2}\mathbf{r}_{CD}}_{=0} + 2 \cdot \underbrace{\mathbf{}_{B2}\omega_2 \times \mathbf{}_{B2}\mathbf{v}_{Rel}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{}_{B2}\mathbf{a}_{Rel}}_{=0}$$

□ (II)

$${}_{B3}\omega_3 \times \begin{vmatrix} \mathbf{i}_3 & \mathbf{j}_3 & \mathbf{k}_3 \\ \dot{\psi} & (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \sin \psi & (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos \psi \\ 0 & 0 & -l \end{vmatrix} =$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{i}_3 & \mathbf{j}_3 & \mathbf{k}_3 \\ \dot{\psi} & (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \sin \psi & (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos \psi \\ -l(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \sin \psi & l\dot{\psi} & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -l\dot{\psi}(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos \psi \\ -l(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \sin \psi \cos \psi \\ l(\dot{\psi}^2 + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \sin^2 \psi) \end{Bmatrix}$$

□ (III)

$${}_{B3}\omega_3 \times {}_{B3}\mathbf{r}_{OE} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_3 & \mathbf{j}_3 & \mathbf{k}_3 \\ \dot{\psi} & (\dot{\alpha} + \dot{\beta})\dot{\psi} \cos \psi & -(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\dot{\psi} \sin \psi \\ 0 & 0 & -l \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -l(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\dot{\psi} \cos \psi \\ l\dot{\psi} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

□ (IV)

$${}_{B2}\omega_2 \times \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ 0 & 0 & (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \\ 0 & r & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ 0 & 0 & (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \\ -r(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -r(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}_{B2}\mathbf{a}_D = \begin{Bmatrix} -b\dot{\alpha}^2 \sin \beta \\ -b\dot{\alpha}^2 \cos \beta - r(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_{B3}\mathbf{a}_D = \mathbf{T}_{\psi} {}_{B2}\mathbf{a}_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -b\dot{\alpha}^2 \sin \beta \\ -b\dot{\alpha}^2 \cos \beta - r(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_{B3}\mathbf{a}_D = \begin{Bmatrix} -b\dot{\alpha}^2 \sin \beta \\ -\left(b\dot{\alpha}^2 \cos \beta + r(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2\right) \cos \psi \\ \left(b\dot{\alpha}^2 \cos \beta + r(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2\right) \sin \psi \end{Bmatrix} \text{ [m/s}^2\text{]}$$

Somando-se os termos calculados anteriormente, chega-se à aceleração linear absoluta da partícula E, representada no sistema de coordenadas B3:

$${}_{s1}\mathbf{a}_E = \begin{Bmatrix} -b\dot{\alpha}^2 \sin \beta - 2l\dot{\psi}(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos \psi \\ -\left(b\dot{\alpha}^2 \cos \beta + r(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2\right) \cos \psi - l(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \sin \psi \cos \psi + l\ddot{\psi} \\ \left(b\dot{\alpha}^2 \cos \beta + r(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2\right) \sin \psi + l\left(\dot{\psi}^2 + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \sin^2 \psi\right) \end{Bmatrix} [m/s^2]$$

(e) Aceleração linear absoluta do ponto C, representada com auxílio da base B2 (veja primeiramente o item (f)).

$$\begin{aligned} {}_{s1}\mathbf{a}_C &= {}_{s1}\mathbf{a}_B \Rightarrow {}_{s2}\mathbf{a}_C = \mathbf{T}_B {}_{s1}\mathbf{a}_B \\ &= \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b\dot{\alpha}^2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_{s2}\mathbf{a}_C = \begin{bmatrix} -b\dot{\alpha}^2 \sin \beta \\ -b\dot{\alpha}^2 \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix} [m/s^2] \end{aligned}$$

(f) Aceleração linear absoluta do ponto B, representada com auxílio da base B1.

$$\begin{aligned} {}_{s1}\mathbf{a}_B &= \underbrace{{}_{s1}\mathbf{a}_O}_{=0} + \underbrace{{}_m\omega_1 \times}_{=0} \underbrace{{}_{s1}\omega_1 \times}_{=0} \underbrace{{}_{s1}\mathbf{r}_{OB}}_{=0} + \underbrace{{}_{s1}\dot{\omega}_1 \times}_{=0} \underbrace{{}_{s1}\mathbf{r}_{OB}}_{=0} + 2 \cdot \underbrace{{}_{s1}\omega_1 \times}_{=0} \underbrace{{}_m\mathbf{v}_{Brel}}_{=0} + \underbrace{{}_m\mathbf{a}_{Brel}}_{=0} \\ {}_{s1}\omega_1 \times \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \dot{\alpha} \\ 0 & b & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \dot{\alpha} \\ -b\dot{\alpha} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -b\dot{\alpha}^2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}_{s1}\mathbf{a}_B &= \begin{bmatrix} 0 \\ -b\dot{\alpha}^2 \\ 0 \end{bmatrix} [m/s^2] \end{aligned}$$

(g) Diagrama de corpo livre da partícula E.

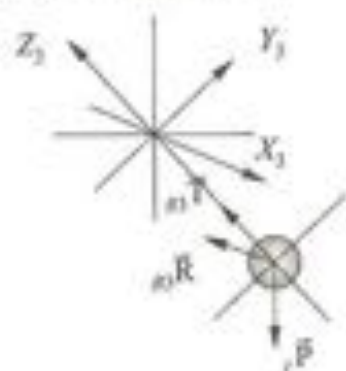


Figura 1.36 Diagrama de corpo livre da partícula E e sistema de referência móvel B3.

□ Forças atuantes sobre a partícula:

$${}_1\mathbf{P} = \{0 \ 0 \ -mg\}^T$$

- Força na direção da haste, representada com auxílio da base B3:

$${}_{B3}\mathbf{T} = \{0 \ 0 \ T\}^T$$

- Força na direção perpendicular à haste, representada com auxílio da base B3:

$${}_{B3}\mathbf{R} = \{-R \ 0 \ 0\}^T$$

- (b) Equilíbrio dinâmico de acordo com a segunda lei de Newton:

$$\sum {}_{B3}\mathbf{F} = \mathbf{T}_\psi \mathbf{T}_\beta \mathbf{T}_\alpha \frac{d}{dt}(m_l \mathbf{v}_E) = \mathbf{T}_\psi \mathbf{T}_\beta \mathbf{T}_\alpha \left(\frac{d}{dt} m_l \mathbf{v}_E + m_l \mathbf{a}_E \right)$$

$$\sum {}_{B3}\mathbf{F} = m {}_{B3}\mathbf{a}_E = {}_{B3}\mathbf{R} + {}_{B3}\mathbf{T} + \mathbf{T}_\psi \mathbf{T}_\beta \mathbf{T}_\alpha \mathbf{P}$$

$${}_{B3}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \sin\psi \\ -mg \cos\psi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -R \\ -mg \sin\psi \\ -mg \cos\psi + T \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} -b\dot{\alpha}^2 \sin\beta - 2l\dot{\psi}(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\cos\psi \\ -\left(b\dot{\alpha}^2 \cos\beta + r(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2\right)\cos\psi - l(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \sin\psi \cos\psi + l\ddot{\psi} \\ \left(b\dot{\alpha}^2 \cos\beta + r(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2\right)\sin\psi + l\left(\dot{\psi}^2 + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \sin^2\psi\right) \end{bmatrix}$$

Obtêm-se três equações, sendo duas para o cálculo das reações R e T e uma para descrever o movimento da partícula E em função do tempo, $\dot{\psi}(t)$.

- Reações

direção X_j :

$$R = m(b\dot{\alpha}^2 \sin\beta + 2l\dot{\psi}(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\cos\psi)$$

direção Z_j :

$$T = m\left\{g \cos\psi + \left[b\dot{\alpha}^2 \cos\beta + r(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2\right]\sin\psi + l\left[\dot{\psi}^2 + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \sin^2\psi\right]\right\}$$

- Equação de movimento

direção Y_j :

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{l} \sin\psi - \frac{\left(b\dot{\alpha}^2 \cos\beta + r(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2\right)}{l} \cos\psi - (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \sin\psi \cos\psi = 0$$

Chama-se a atenção para o fato de a equação de movimento ser uma equação diferencial, não linear, de segunda ordem, devendo ser solucionada numericamente. Após

a resolução da mesma, de forma semelhante à resolução numérica apresentada no Exemplo 8, elaboram-se as animações dos movimentos para diferentes condições iniciais de movimento (vide CR-ROM). A Figura 1.37 ilustra um dos quadros da animação dos movimentos realizados pelo pêndulo quando o braço e o disco giram com uma velocidade angular constante $\dot{\alpha}$ e $\dot{\beta}$ de $\pi/4$ [rad/s] a partir da posição inicial $\alpha = \beta = 0$ [rad]. Como condição inicial de movimento adotam-se $\dot{\psi} = \pi/4$ [rad] e $\dot{\Psi} = 0$ [rad/s].



Figura 1.37

Trajetoória realizada pelo pêndulo quando o braço e o disco giram com uma velocidade angular constante $\dot{\alpha}$ e $\dot{\beta}$ de $\pi/4$ [rad/s] a partir da posição inicial $\alpha = \beta = 0$ [rad], $\dot{\psi} = \pi/4$ [rad] e $\dot{\Psi} = 0$ [rad/s] (veja animação no CD).

1.9 Cinemática e Cinética de Sistemas de Partículas

1.9.1 Pêndulo Duplo

Exemplo 11

O objetivo deste exemplo é ilustrar o procedimento de cálculo das equações de movimento e das reações dinâmicas para um sistema de partículas, no caso um sistema composto por duas partículas de massa m_1 e m_2 . As reações dinâmicas só podem ser calculadas quando as equações de movimento das duas massas são resolvidas. Essas equações (equações diferenciais de segunda ordem não lineares) são responsáveis por descrever o comportamento dinâmico das partículas ao longo do tempo. Observou-se, nos exemplos anteriores, que as soluções dessas equações diferenciais puderam ser obtidas analiticamente, em alguns casos particulares. Aqui, no entanto, essas equações não podem ser resolvidas analiticamente. Isto ocorre, na realidade, com a maioria das equações utilizadas para descrever a dinâmica dos sistemas me-

cânicos, dada a complexidade dos modelos e das equações diferenciais. Assim, ilustra-se aqui como resolver essas equações numericamente, demonstrando a solução tanto na forma gráfica como na forma de animações gráficas. Essas animações (implementadas em computador) podem ser comparadas com um protótipo real construído e mostrado na Figura 1.38 (veja animações e filme no CD).

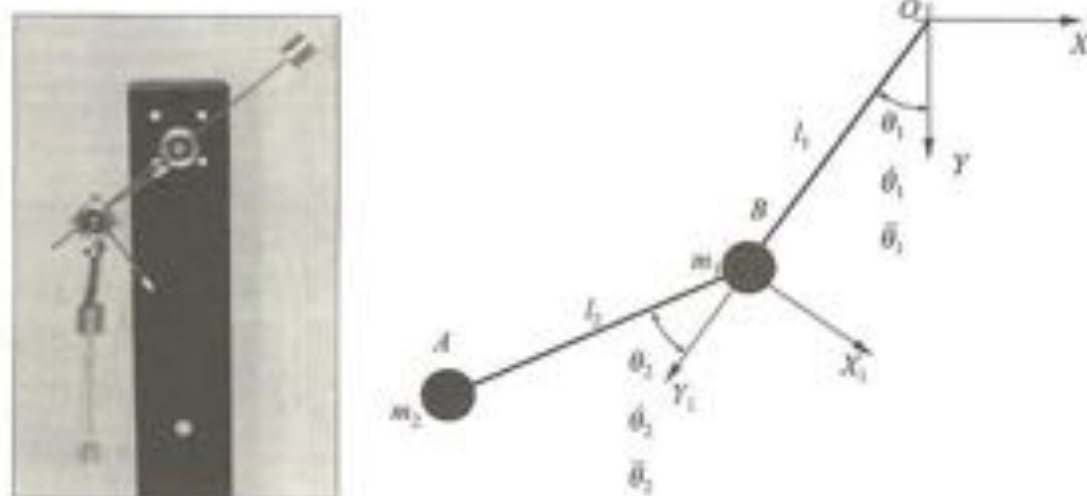


Figura 1.38

Pêndulo duplo – sistema físico com um sistema móvel de referência posicionado sobre a massa m_1 e seu modelo mecânico composto por duas massas concentradas (partículas).

O pêndulo duplo mostrado na Figura 1.38 é composto por duas partículas com massas concentradas m_1 e m_2 . Pensando-se no movimento absoluto da massa m_2 , este parece ser extremamente complicado. Mas utilizando-se um sistema de referência móvel posicionado sobre a massa m_1 , em torno da qual a massa m_2 gira, observa-se que esse movimento é simplesmente uma combinação de dois movimentos circulares planos: a massa m_1 gira em torno do ponto O (origem do sistema inercial) e a massa m_2 gira em torno da massa m_1 . Detecta-se claramente, através deste exemplo, o motivo pelo qual sistemas de referência móveis são tão utilizados. Com o auxílio dos mesmos, facilitam-se a representação e o cálculo dos movimentos mais complexos de partículas e de corpos. Chama-se a atenção para o seguinte fato: os movimentos de partículas podem sempre ser decompostos em movimentos de translação e de rotação.

(1) Para descrever os movimentos das duas massas trabalha-se com dois sistemas de referência, os quais são mostrados na Figura 38:

- Sistema de referência inercial I , representado pelos cursores \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} , com origem em O ;
- Sistema de referência móvel $B1$, representado pelas cursores \hat{i}_1 , \hat{j}_1 , \hat{k}_1 , com origem em B .

O sistema móvel $B1$ é posicionado sobre a massa m_1 , girando com uma velocidade angular $\dot{\theta}_1$ em torno do eixo Z (inercial). A posição da massa m_1 passa, então, a ser descrita em função do ângulo $\theta_1(t)$ e do comprimento l_1 .

(2) Uma vez que se trabalha com dois sistemas de referência, necessita-se viabilizar a passagem de um para o outro sem problemas. Isto é feito através da matriz de transformação de coordenadas, calculada a seguir:

$$\mathbf{i}_1 = \cos\theta_1 \mathbf{i} + \sin\theta_1 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j}_1 = -\sin\theta_1 \mathbf{i} + \cos\theta_1 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{k}_1 = 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 1 \mathbf{k}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{k}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix}$$

$${}_{m1}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\theta_1} \cdot {}_1\mathbf{s} \quad {}_1\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\theta_1}^T \cdot {}_{m1}\mathbf{s}$$

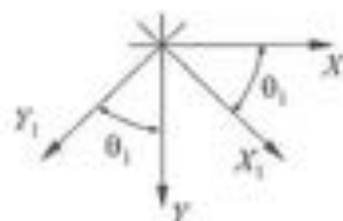


Figura 1.39
Rotação positiva da base B1 em torno do eixo Z.

(3) Definido os sistemas de referência e as matrizes de transformação de coordenadas, escrevem-se as grandezas envolvidas no problema de forma vetorial. Primeiramente, têm-se os vetores de posição \mathbf{l}_1 e \mathbf{l}_2 .

O vetor ${}_{m1}\mathbf{l}_1$ pode ser descrito mais facilmente com auxílio da base móvel B1.

$${}_{m1}\mathbf{l}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Transformando a sua representação para a base inercial com auxílio da matriz de transformação de coordenadas, tem-se:

$${}_1\mathbf{l}_1 = \mathbf{T}_{\theta_1}^T \cdot {}_{m1}\mathbf{l}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -l_1 \sin\theta_1 \\ l_1 \cos\theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

O vetor ${}_{m1}\mathbf{l}_2$ pode ser descrito mais facilmente com auxílio da base móvel B1.

$${}_{m1}\mathbf{l}_2 = \begin{Bmatrix} -l_2 \sin\theta_2 \\ l_2 \cos\theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Transformando a sua representação para a base inercial, com auxílio da matriz de transformação de coordenadas, tem-se:

$${}_1\mathbf{l}_2 = \mathbf{T}_{\theta_1}^T \cdot {}_{B1}\mathbf{l}_2 = \begin{bmatrix} -l_2(\sin\theta_2 \cos\theta_1 + \cos\theta_2 \sin\theta_1) \\ l_2(-\sin\theta_2 \sin\theta_1 + \cos\theta_2 \cos\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

A seguir, definem-se os vetores de velocidade e aceleração angular do sistema móvel de referência. A velocidade angular do sistema móvel de referência pode ser descrita mais facilmente no sistema inercial, pois esta rotação ocorre em torno do eixo Z do sistema inercial:

$${}_1\dot{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

A aceleração angular do sistema móvel de referência, analogamente, é também descrita mais facilmente com auxílio da base inercial:

$${}_1\ddot{\theta}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

A velocidade angular relativa da massa m_2 pode ser descrita mais facilmente no sistema móvel B1, pois esta rotação ocorre em torno do eixo Z1 do sistema móvel. Em seguida, transforma-se a mesma para o sistema inercial:

$${}_{B1}\dot{\theta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_1\dot{\theta}_2 = \mathbf{T}_{\theta_1}^T \cdot {}_{B1}\dot{\theta}_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

Analogamente, a representação do vetor de aceleração angular relativa da massa m_2 pode também ser feita mais facilmente com auxílio da base móvel B1 e transformada para a base inercial:

$${}_{B1}\ddot{\theta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_1\ddot{\theta}_2 = \mathbf{T}_{\theta_1}^T \cdot {}_{B1}\ddot{\theta}_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

(4) Após definidas os vetores de deslocamento e velocidade angular, calculam-se as velocidades lineares das massas m_1 e m_2 posicionadas sobre os pontos B e A, respectivamente.

$${}_1\mathbf{v}_A = {}_1\mathbf{v}_B + {}_1\dot{\theta}_1 \times {}_1\mathbf{l}_2 + {}_1\mathbf{v}_{B/A}$$

$${}_1\mathbf{v}_B = {}_1\dot{\theta}_1 \times {}_1\mathbf{l}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ -l_1 \sin\theta_1 & l_1 \cos\theta_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 l_1 \cos\theta_1 \\ -\dot{\theta}_1 l_1 \sin\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}_1\dot{\theta}_1 \times {}_1\mathbf{l}_2 = \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \end{array} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_1 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -\dot{\theta}_1 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_1\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{T}_{\theta_1}^T \frac{d}{dt} ({}_1\mathbf{l}_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} -l_2 \sin\theta_2 \\ l_2 \cos\theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_2 l_2 \cos\theta_2 \\ -\dot{\theta}_2 l_2 \sin\theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_2 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -\dot{\theta}_2 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_1\mathbf{v}_A = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_1 l_1 \cos\theta_1 - \dot{\theta}_1 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - \dot{\theta}_2 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -\dot{\theta}_1 l_1 \sin\theta_1 - \dot{\theta}_1 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - \dot{\theta}_2 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(5) Após a definição dos vetores de velocidade linear, \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B , calculam-se as acelerações lineares das massas m_1 e m_2 posicionadas sobre os pontos B e A, respectivamente.

$${}_1\mathbf{a}_A = {}_1\mathbf{a}_B + {}_1\dot{\theta}_1 \times {}_1\dot{\theta}_1 \times {}_1\mathbf{l}_2 + {}_1\ddot{\theta}_1 \times {}_1\mathbf{l}_2 + 2 \cdot {}_1\dot{\theta}_1 \times {}_1\mathbf{v}_{B/A} \times {}_1\mathbf{a}_{B/A}$$

Calculando-se cada um dos termos das equação da aceleração, tem-se:

$${}_1\mathbf{a}_B = {}_1\ddot{\theta}_1 \times {}_1\dot{\theta}_1 \times {}_1\mathbf{l}_1 + {}_1\ddot{\theta}_1 \times {}_1\mathbf{l}_1 = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1^2 l_1 \sin\theta_1 - \ddot{\theta}_1 l_1 \cos\theta_1 \\ -\ddot{\theta}_1^2 l_1 \cos\theta_1 - \ddot{\theta}_1 l_1 \sin\theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{B_x} \\ a_{B_y} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_1\dot{\theta}_1 \times {}_1\dot{\theta}_1 \times {}_1\mathbf{l}_2 = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1^2 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -\dot{\theta}_1^2 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_1\ddot{\theta}_1 \times {}_1\mathbf{l}_2 = \begin{Bmatrix} -\ddot{\theta}_1 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -\ddot{\theta}_1 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$2 \cdot {}_1\dot{\theta}_1 \times {}_1\mathbf{v}_{B/A} = \begin{Bmatrix} 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 {}_I \mathbf{a}_{massa} &= \mathbf{T}_{\theta_1}^T \frac{d^2}{dt^2} ({}_I \mathbf{l}_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \left(\begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \\ l_2 \cos \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2^2 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - \ddot{\theta}_2 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -\ddot{\theta}_2^2 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - \ddot{\theta}_2 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Somando-se os termos anteriores, chega-se a uma expressão relativamente longa para a aceleração da massa A, descrita no sistema inercial:

$$\begin{aligned}
 {}_I \mathbf{a}_A &= \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1^2 l_1 \sin \theta_1 - \ddot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 + \ddot{\theta}_1^2 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - \ddot{\theta}_1 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -\ddot{\theta}_1^2 l_1 \cos \theta_1 - \ddot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 - \ddot{\theta}_1^2 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - \ddot{\theta}_1 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2\ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \ddot{\theta}_2^2 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - \ddot{\theta}_2 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ -2\ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - \ddot{\theta}_2^2 l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - \ddot{\theta}_2 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Ax} \\ a_{Ay} \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(6) Cálculo das forças de reação e levantamento da equação de movimento com base na segunda e terceira leis de Newton. Com o auxílio do diagrama de corpo livre escrevem-se as forças atuantes sobre cada uma das partículas.

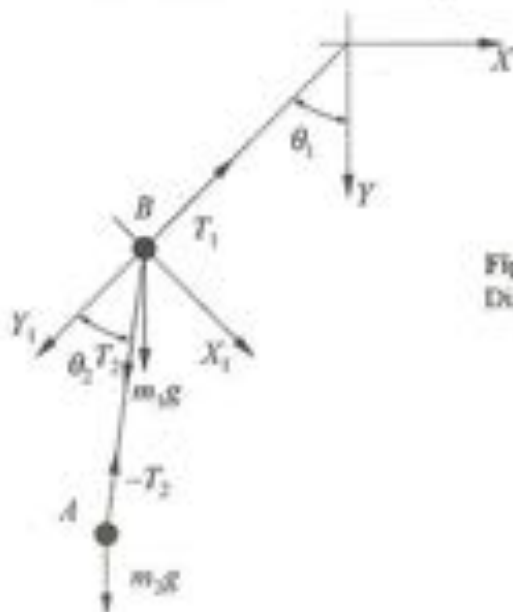


Figura 1.40
Diagrama de corpo livre para as duas massas.

Forças peso descritas no sistema inercial:

$${}_i\mathbf{P}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 g \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}_i\mathbf{P}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Forças de tração descritas no sistema móvel B1:

Na massa m_1 :

$${}_B\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -T_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_i\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_{B_1}^T \cdot {}_B\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} T_1 \sin \theta_1 \\ -T_1 \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na massa m_2 :

$${}_B\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} T_2 \sin \theta_2 \\ -T_2 \cos \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_i\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_{B_2}^T \cdot {}_B\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} T_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -T_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo-se uso da segunda lei de Newton para cada uma das partículas, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum {}_i\mathbf{F}_B &= m_1 {}_i\mathbf{a}_B \Rightarrow {}_i\mathbf{P}_B + {}_i\mathbf{T}_1 - {}_i\mathbf{T}_2 = m_1 {}_i\mathbf{a}_B \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} T_1 \sin \theta_1 - T_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ m_1 g - T_1 \cos \theta_1 + T_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} &= m_1 \begin{bmatrix} a_{B_x} \\ a_{B_y} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} \sum {}_i\mathbf{F}_A &= m_2 {}_i\mathbf{a}_A \Rightarrow {}_i\mathbf{P}_A + {}_i\mathbf{T}_2 = m_2 {}_i\mathbf{a}_A \\ \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -T_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_2 a_{A_x} \\ m_2 a_{A_y} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Resolvendo-se as quatro equações dadas pelas Equações 1.34 e 1.35, chega-se às expressões analíticas das forças dinâmicas atuantes nas hastes T_1 e T_2 e nas equações de movimento $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2$ as quais são todas dependentes do tempo e das condições iniciais de movimento.

ATENÇÃO

Resulta-se, aqui, no entanto, que a resolução deste problema no sistema inercial acarreta em um trabalho árduo, no que diz respeito à manipulação das equações. Observa-se, na maioria dos problemas práticos, que a realização do cálculo das grandezas cinemáticas (deslocamento, velocidade, aceleração) e da soma/diferença de forças em sistemas de referência solidários às partículas simplifica, de maneira significativa, a manipulação das equações. Chega-se, desta forma, a expressões matemáticas bem mais simples.

no que diz respeito a número de termos, e bem mais fáceis de serem interpretadas e entendidas fisicamente. Indo além, quando se trabalha com sistemas compostos por muitas partículas e programas computacionais de manipulação simbólica, como, por exemplo, o software MATHEMATICA, é extremamente vantajoso descrever essas equações nas respectivas bases móveis, aumentando-se, desta forma, a velocidade dos cálculos computacionais.

Um exemplo disto é dado em seguida, quando se resolve o mesmo problema fazendo-se uso de dois sistemas de referência móvel: B1 solidário a massa B e B2 solidário à massa A, como pode ser visto na Figura 1.41.

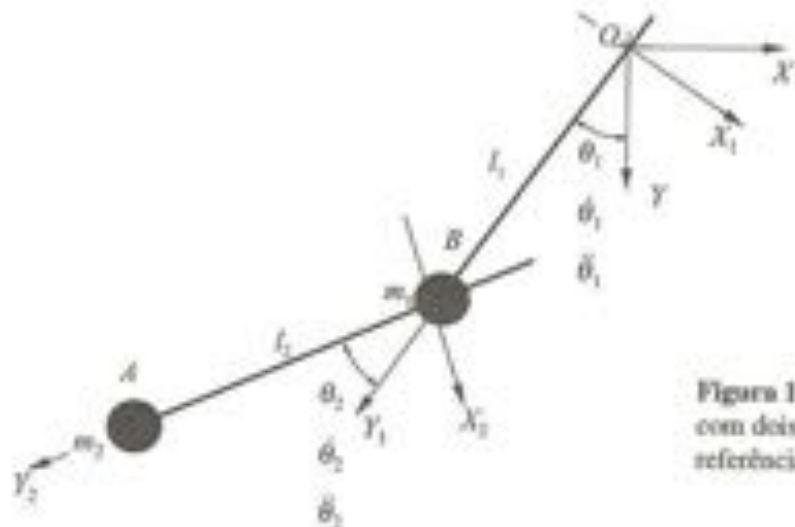


Figura 1.41 Pêndulo duplo com dois sistemas móveis de referência, B1 e B2.

⇒ **Sistemas de referência:**

- ⊃ I – base inercial representada pelos cursores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (origem O).
- ⊃ B1 – base móvel solidária à massa B, representada pelos cursores $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ (origem O).
- ⊃ B2 – base móvel solidária à massa A, representada pelos cursores $\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2$ (origem B).

⇒ **Matrizes de transformação de coordenadas:**

- ⊃ Do sistema inercial para o sistema móvel B1 e vice-versa:

$$\mathbf{T}_{e_1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}_{e_1}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{e_1} \cdot {}_I\mathbf{s} \quad {}_I\mathbf{s} = \mathbf{T}_{e_1}^T \cdot {}_{e_1}\mathbf{s}$$

- ⊃ Do sistema móvel B1 para o sistema móvel B2 e vice-versa:

$$\mathbf{T}_{e_2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}_{e_2}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{e_2} \cdot {}_{e_1}\mathbf{s} \quad {}_{e_1}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{e_2}^T \cdot {}_{e_2}\mathbf{s}$$

- Vetores de posição:

$${}_{B1}\mathbf{l}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad {}_{B2}\mathbf{l}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Vetores de velocidade angular absoluta dos sistemas móveis B1 e B2:

- Velocidade angular absoluta da base móvel B1

$${}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{T}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix}$$

- Velocidade angular absoluta da base móvel B2

$$\begin{aligned} {}_{B2}\boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{T}_{\theta_2} \mathbf{T}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 + \mathbf{T}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

- Vetores de acelerações angulares dos sistemas móveis B1 e B2:

- Aceleração angular absoluta do sistema B1:

$${}_{B1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix}$$

- Aceleração angular absoluta do sistema B2:

$${}_{B2}\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix}$$

- Vetores de aceleração absoluta das massas A e B, representados, respectivamente, nos sistemas B1 e B2:

$${}_{B1}\mathbf{a}_B = \underbrace{{}_{B1}\mathbf{a}_O}_{=0} + {}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1 \times \underbrace{{}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1 \times {}_{B1}\mathbf{l}_1}_{=0} + {}_{B1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}_{B1}\mathbf{l}_1 + 2 \cdot \underbrace{{}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1 \times \underbrace{{}_{B1}\mathbf{v}_{B,O}}_{=0}}_{=0} \times \underbrace{{}_{B1}\mathbf{a}_{B,O}}_{=0}$$

$${}_{B1}\mathbf{a}_B = {}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1 \times \underbrace{{}_{B1}\boldsymbol{\omega}_1 \times {}_{B1}\mathbf{l}_1}_{=0} + {}_{B1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times {}_{B1}\mathbf{l}_1 = \begin{Bmatrix} -l_1\ddot{\theta}_1 \\ -l_1\dot{\theta}_1^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_{B1}\mathbf{a}_A = {}_{B1}\mathbf{a}_B + {}_{B1}\dot{\omega}_2 \times {}_{B1}\dot{\omega}_2 \times {}_{B1}\mathbf{l}_2 + {}_{B1}\dot{\omega}_2 \times {}_{B1}\mathbf{l}_2 + \underbrace{2 \cdot {}_{B1}\dot{\omega}_2 \times {}_{B1}\mathbf{v}_{Bv} \times {}_{B1}\mathbf{a}_{Bv}}_{=0}$$

$${}_{B1}\mathbf{a}_A = \mathbf{T}_{\theta_2} \cdot {}_{B1}\mathbf{a}_B + {}_{B1}\dot{\omega}_2 \times {}_{B1}\dot{\omega}_2 \times {}_{B1}\mathbf{l}_2 + {}_{B1}\dot{\omega}_2 \times {}_{B1}\mathbf{l}_2$$

$${}_{B1}\mathbf{a}_A = \begin{pmatrix} -l_1(\ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2) - l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ l_1(\ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2) - l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Forças atuantes sobre as massas A e B descritas com o auxílio das bases B1 e B2:

□ Força peso

$${}_{B1}\mathbf{P}_B = \mathbf{T}_{\theta_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ m_1 g \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 g \sin \theta_1 \\ m_1 g \cos \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}_{B2}\mathbf{P}_A = \mathbf{T}_{\theta_2} \cdot \mathbf{T}_{\theta_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 g \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_2 g \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Força da haste 1, atuando sobre a massa 1, representada no sistema móvel B1:

$${}_{B1}\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -T_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Força da haste 2, atuando sobre a massa 2, representada no sistema móvel B2:

$${}_{B2}\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -T_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Equilíbrio dinâmico das partículas A e B:

□ Partícula B

$$\sum {}_{B1}\mathbf{F}_B = m_1 \cdot {}_{B1}\mathbf{a}_B \Rightarrow {}_{B1}\mathbf{P}_B + {}_{B1}\mathbf{T}_1 - {}_{B1}\mathbf{T}_2 = m_1 \cdot {}_{B1}\mathbf{a}_B$$

$$\begin{pmatrix} m_1 g \sin \theta_1 - T_2 \sin \theta_2 \\ m_1 g \cos \theta_1 - T_1 + T_2 \cos \theta_2 \\ 0 \end{pmatrix} = m_1 \begin{pmatrix} -l_1 \ddot{\theta}_1 \\ -l_1 \dot{\theta}_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

□ *Partícula A*

$$\sum_{R1} \mathbf{F}_A = m_2 \mathbf{a}_A \Rightarrow \sum_{R1} \mathbf{P}_A + \sum_{R2} \mathbf{T}_2 = m_2 \mathbf{a}_A$$

$$\begin{Bmatrix} m_2 g \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2) - T_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = m_2 \begin{Bmatrix} -l_1(\ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2) - l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ l_1(\ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2) - l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.37)$$

Reescrevendo-se as Equações 1.36 e 1.37 de forma matricial, chega-se ao seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\sin \theta_2 & m_1 l_1 & 0 \\ -1 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2(l_1 \cos \theta_2 + l_2) & m_2 l_2 \\ 0 & -1 & -m_2 l_1 \sin \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_1 g \sin \theta_1 \\ -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 - m_1 g \cos \theta_1 \\ -m_2 [g \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2] \\ -m_2 [g \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2] \end{Bmatrix}$$

Resolvendo-o por Cramer, têm-se as equações que descrevem o comportamento das forças dinâmicas atuantes nas hastes, T_1 e T_2 , e as equações diferenciais não lineares de segunda ordem $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2$, as quais descrevem o movimento das massas A e B em função do tempo.

Desta forma, obtém-se a força T_1 atuante na haste 1 resolvendo-se os determinantes

$$T_1 = \frac{\begin{vmatrix} -m_1 g \sin \theta_1 & -\sin \theta_2 & m_1 l_1 & 0 \\ -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 - m_1 g \cos \theta_1 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ -m_2 [g \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2] & 0 & m_2(l_1 \cos \theta_2 + l_2) & m_2 l_2 \\ -m_2 [g \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2] & -1 & -m_2 l_1 \sin \theta_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -\sin \theta_2 & m_1 l_1 & 0 \\ -1 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2(l_1 \cos \theta_2 + l_2) & m_2 l_2 \\ 0 & -1 & -m_2 l_1 \sin \theta_2 & 0 \end{vmatrix}}$$

ou seja,

$$T_1 = \left(-\dot{\theta}_1^2 l_1^2 l_2 m_1^2 m_2 - g l_1 l_2 m_1^2 m_2 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 l_1 l_2^2 m_1 m_2^2 \cos \theta_2 - 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2^2 m_1 m_2^2 \cos \theta_2 - \right. \\ \left. \dot{\theta}_2^2 l_1 l_2^2 m_1 m_2^2 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_1^2 l_1^2 l_2 m_1 m_2^2 \cos^2 \theta_2 - g l_1 l_2 m_1 m_2^2 \cos \theta_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - \right. \\ \left. g l_1 l_2 m_1 m_2^2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \dot{\theta}_1^2 l_1^2 l_2 m_1 m_2^2 \sin^2 \theta_2 - g l_1 l_2 m_1 m_2^2 \cos \theta_1 \sin^2 \theta_2 \right) / \\ \left(-l_2 l_2 m_1 m_2 - l_1 l_2 m_2^2 \sin^2 \theta_2 \right) \quad (1.38)$$

Para a força T_2 atuante na haste 2, tem-se

$$T_2 = \begin{vmatrix} 0 & -m_1 g \sin \theta_1 & m_1 l_1 & 0 \\ -1 & -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 - m_1 g \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2 [g \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2] & m_2 (l_1 \cos \theta_2 + l_2) & m_2 l_2 \\ 0 & -m_2 [g \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2] & -m_2 l_1 \sin \theta_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -\sin \theta_2 & m_1 l_1 & 0 \\ -1 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 (l_1 \cos \theta_2 + l_2) & m_2 l_2 \\ 0 & -1 & -m_2 l_1 \sin \theta_2 & 0 \end{vmatrix}$$

ou seja,

$$T_2 = \left(-\dot{\theta}_1^2 l_1 l_2^2 m_1 m_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2^2 m_1 m_2^2 - \dot{\theta}_2^2 l_1 l_2^2 m_1 m_2^2 - \dot{\theta}_1^2 l_1^2 l_2 m_1 m_2^2 \cos \theta_2 - \right. \\ \left. g l_1 l_2 m_1 m_2^2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - g l_1 l_2 m_1 m_2^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \right) / \left(-l_1 l_2 m_1 m_2 - l_1 l_2 m_2^2 \sin^2 \theta_2 \right) \quad (1.39)$$

A equação diferencial de movimento que descreve o comportamento do ângulo θ_1 é obtida resolvendo-se os determinantes

$$\ddot{\theta}_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\sin \theta_2 & -m_1 g \sin \theta_1 & 0 \\ -1 & \cos \theta_2 & -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 - m_1 g \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -m_2 [g \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2] & m_2 l_2 \\ 0 & -1 & -m_2 [g \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2] & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -\sin \theta_2 & m_1 l_1 & 0 \\ -1 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 (l_1 \cos \theta_2 + l_2) & m_2 l_2 \\ 0 & -1 & -m_2 l_1 \sin \theta_2 & 0 \end{vmatrix}$$

ou seja,

$$\ddot{\theta}_1 = \left(g l_2 m_1 m_2 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 l_2^2 m_2^2 \sin \theta_2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_2^2 m_2^2 \sin \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 l_2^2 m_2^2 \sin \theta_2 - \right. \\ \left. \dot{\theta}_1^2 l_1 l_2 m_2^2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 - g l_2 m_2^2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta_2 \right) / \left(-l_1 l_2 m_1 m_2 - l_1 l_2 m_2^2 \sin^2 \theta_2 \right) \quad (1.40)$$

Finalmente, tem-se a última expressão relacionada com a equação de movimento para θ_2

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\sin\theta_2 & m_1 l_1 & -m_1 g \sin\theta_1 \\ -1 & \cos\theta_2 & 0 & -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 - m_1 g \cos\theta_1 \\ 0 & 0 & m_2(l_1 \cos\theta_2 + l_2) & -m_2 [g \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2] \\ 0 & -1 & -m_2 l_1 \sin\theta_2 & -m_2 [g \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos\theta_2 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -\sin\theta_2 & m_1 l_1 & 0 \\ -1 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2(l_1 \cos\theta_2 + l_2) & m_2 l_2 \\ 0 & -1 & -m_2 l_1 \sin\theta_2 & 0 \end{vmatrix}}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2 = & \left(-g l_2 m_1 m_2 \sin\theta_1 - g l_1 m_1 m_2 \cos\theta_2 \sin\theta_1 + \dot{\theta}_1^2 l_1^2 m_1 m_2 \sin\theta_2 + \dot{\theta}_1^2 l_2^2 m_2^2 \sin\theta_2 + \right. \\ & 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_2^2 m_2^2 \sin\theta_2 + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 m_2^2 \sin\theta_2 + 2\dot{\theta}_1^2 l_1 l_2 m_2^2 \cos\theta_2 \sin\theta_2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 m_2^2 \cos\theta_2 \sin\theta_2 + \\ & \dot{\theta}_2^2 l_1 l_2 m_2^2 \cos\theta_2 \sin\theta_2 + \dot{\theta}_1^2 l_1^2 m_2^2 \cos^2\theta_2 \sin\theta_2 + g l_2 m_2^2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin\theta_2 + \\ & g l_1 m_2^2 \cos\theta_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \sin\theta_2 + \dot{\theta}_1^2 l_1^2 m_2^2 \sin^3\theta_2 + g l_1 m_1 m_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \\ & \left. g l_1 m_2^2 \sin^2\theta_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \right) / \left(-l_1 l_2 m_1 m_2 - l_1 l_2 m_2^2 \sin^2\theta_2 \right) \end{aligned} \quad (1.41)$$

A seguir, um pequeno programa computacional e seu respectivo diagrama de blocos são mostrados, ilustrando o processo de integração dessas equações no domínio do tempo. O método utilizado é o mesmo descrito anteriormente, aproximando-se as velocidades e os deslocamentos por série de Taylor. O programa é responsável pela resolução das equações de movimento em função do tempo para diferentes condições iniciais de movimento.

7. Fluxograma do Programa Computacional

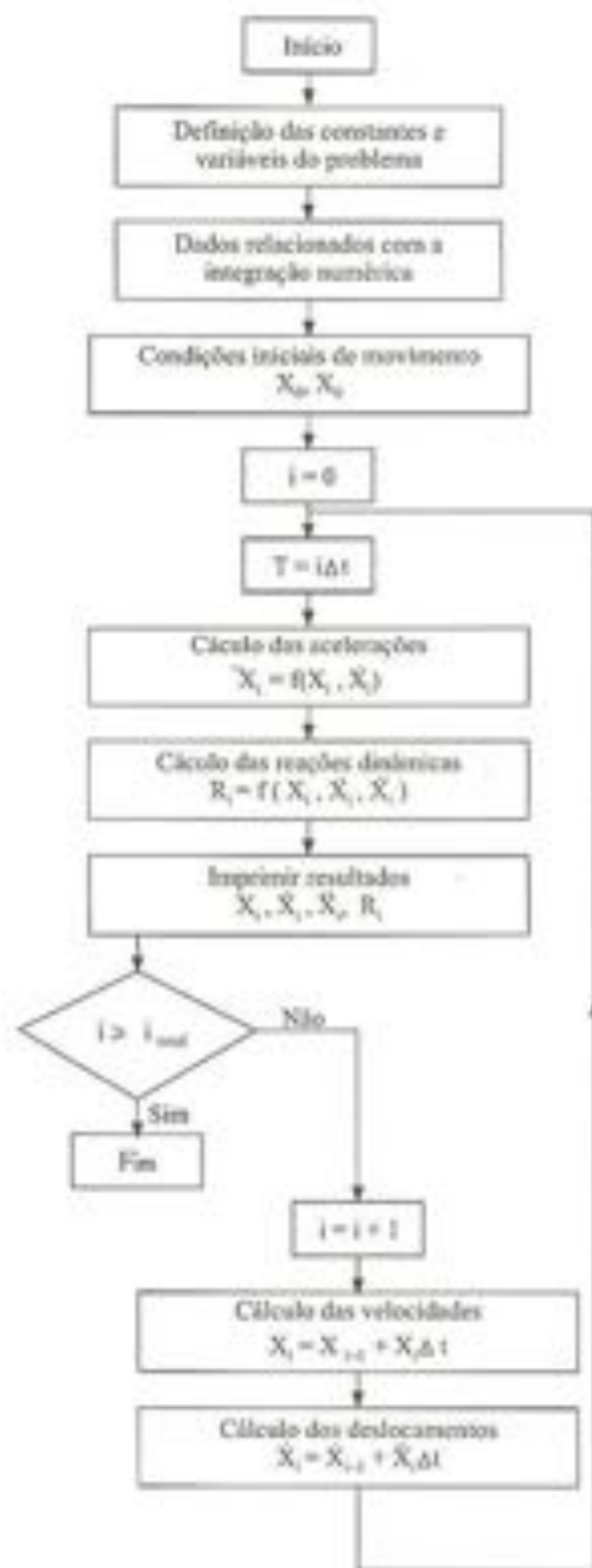


Figura 1.42

Fluxograma do programa utilizado para a integração das equações de movimento do pêndulo duplo.

□ Programa Computacional em Linguagem Pascal

```

program pend2;
uses crt;

{DEFINICAO DAS VARIÁVEIS DO PROGRAMA}
var
m1, m2 : real;
l1, l2 : real;
t1, t2 : real;
dt1, dt2 : real;
ddt1, ddt2 : real;
Tr1, Tr2 : real;
t, tempo, deltat, freq : real;
h1x, h1y, h2x, h2y : real;
arq1, arq2, arq3, arq4 : text;
ni, n, fim, nj, na : integer;

{DEFINICAO DAS CONSTANTES DO PROGRAMA}
const
g = 9.81; {aceleracao da gravidade [m/s**2]}

{DEFINICAO DAS FUNCOES}
function power(base:real;exp:integer):real;
var iii:integer;
pow:real;
begin
pow:=1;
for iii:=1 to exp do
begin
pow:=pow*base;
end;
power:=pow;
end;

{INICIO DO PROGRAMA PRINCIPAL}
begin
clrscr;

{DADOS RELACIONADOS COM A INTEGRACAO NUMERICA}
t := 0.0; {tempo inicial em [s]}
tempo := 4.00; {tempo total de analise do movimento em [s]}
n := 25000; {numero total de pontos utilizados}
na := 1; {numero de vezes para a repeticao da integracao}
deltat := (tempo/na)/n; {passo de integracao em [s]}
fim := 1; {criterio para fechamento dos arquivos}

{NOME DOS ARQUIVOS ONDE OS RESULTADOS SERAO ARMAZENADOS}
assign(arq1,'arqt1.res');
assign(arq2,'arqt2.res');

```

```

assign(arq3,'arq1.res');
assign(arq4,'arq2.res');

{DADOS GEOMETRICOS E DE MASSA DO PENDULO}
m1 := 0.00046; {massa 1 [Kg]}
m2 := 0.0046; {massa 2 [Kg]}
l1 := 0.07; {comprimento da haste 1 [m]}
l2 := 0.07; {comprimento da haste 2 [m]}

{CONDICOES INICIAIS DE MOVIMENTO}
t1 := -3.1416/4.0; {angulo inicial teta 1}
t2 := 3.1416/4.0; {angulo inicial teta 2}
dt1 := 0.0; {velocidade angular teta 1 ponto}
dt2 := 0.0; {velocidade angular teta 2 ponto}
h1x := (-l1 * sin (t1)); {posição inicial da massa 1 na direção X}
h1y := -(l1 * cos (t1)); {posição inicial da massa 1 na direção Y}
h2x := (-l1 * sin (t1) - l2 * sin (t1 + t2)); {posição inicial da massa 2 na direção X}
h2y := -(l1 * cos (t1) + l2 * cos (t1 + t2)); {posição inicial da massa 2 na direção Y}

{ABERTURA DOS ARQUIVOS}
rewrite(arq1);
rewrite(arq2);
rewrite(arq3);
rewrite(arq4);

{CONDICOES INICIAIS DO MOVIMENTO ARMAZENADAS NOS ARQUIVOS}
writeln(arq1,t,' ',t1);
writeln(arq2,t,' ',t2);
writeln(arq3,h1x,' ',h1y);
writeln(arq4,h2x,' ',h2y);

{INICIO DA ANALISE DO MOVIMENTO NO DOMINIO DO TEMPO}
for nj:=1 to na do
begin
for ni:=2 to n do
begin
t := t + deltat; {variação do tempo}

{CALCULO DA ACELERACAO ANGULAR DA MASSA 1}
ddt1 := (g*l2*m1*m2*Sin(t1) - Power(dt1,2)*Power(l2,2)*Power(m2,2)*
Sin(t2) - 2*dt1*dt2*Power(l2,2)*Power(m2,2)*Sin(t2) -
Power(dt2,2)*Power(l2,2)*Power(m2,2)*Sin(t2) -
Power(dt1,2)*l1*l2*Power(m2,2)*Cos(t2)*Sin(t2) -
g*l2*Power(m2,2)*Cos(t1 + t2)*Sin(t2))/
(-l1*l2*m1*m2) - l1*l2*Power(m2,2)*Power(Sin(t2),2));

{CALCULO DA ACELERACAO ANGULAR DA MASSA 2}
ddt2 := (-g*l2*m1*m2*Sin(t1)) - g*l1*m1*m2*Cos(t2)*Sin(t1) +
Power(dt1,2)*Power(l1,2)*m1*m2*Sin(t2) +

```

```

Power(dt1,2)*Power(l2,2)*Power(m2,2)*Sin(t2) +
2*dt1*dt2*Power(l2,2)*Power(m2,2)*Sin(t2) +
Power(dt2,2)*Power(l2,2)*Power(m2,2)*Sin(t2) +
2*Power(dt1,2)*l1*l2*Power(m2,2)*Cos(t2)*Sin(t2) +
2*dt1*dt2*l1*l2*Power(m2,2)*Cos(t2)*Sin(t2) +
Power(dt2,2)*l1*l2*Power(m2,2)*Cos(t2)*Sin(t2) +
Power(dt1,2)*Power(l1,2)*Power(m2,2)*Power(Cos(t2),2)*Sin(t2) +
g*l2*Power(m2,2)*Cos(t1 + t2)*Sin(t2) +
g*l1*Power(m2,2)*Cos(t2)*Cos(t1 + t2)*Sin(t2) +
Power(dt1,2)*Power(l1,2)*Power(m2,2)*Power(Sin(t2),3) +
g*l1*m1*m2*Sin(t1 + t2) +
g*l1*Power(m2,2)*Power(Sin(t2),2)*Sin(t1 + t2))/
(-(l1*l2*m1*m2) - l1*l2*Power(m2,2)*Power(Sin(t2),2));

```

```
{CALCULO DA REACAO DINAMICA NA HASTE 1}
```

```

Tr1 := -(Power(dt1,2)*Power(l1,2)*l2*Power(m1,2)*m2) -
g*l1*l2*Power(m1,2)*m2*Cos(t1) -
Power(dt1,2)*l1*Power(l2,2)*m1*Power(m2,2)*Cos(t2) -
2*dt1*dt2*l1*Power(l2,2)*m1*Power(m2,2)*Cos(t2) -
Power(dt2,2)*l1*Power(l2,2)*m1*Power(m2,2)*Cos(t2) -
Power(dt1,2)*Power(l1,2)*l2*m1*Power(m2,2)*Power(Cos(t2),2) -
g*l1*l2*m1*Power(m2,2)*Cos(t2)*Cos(t1 + t2) -
g*l1*l2*m1*Power(m2,2)*Cos(t2)*Sin(t1)*Sin(t2) -
Power(dt1,2)*Power(l1,2)*l2*m1*Power(m2,2)*Power(Sin(t2),2) -
g*l1*l2*m1*Power(m2,2)*Cos(t1)*Power(Sin(t2),2))/
(-(l1*l2*m1*m2) - l1*l2*Power(m2,2)*Power(Sin(t2),2));

```

```
{CALCULO DA REACAO DINAMICA NA HASTE 2}
```

```

Tr2 := -(Power(dt1,2)*l1*Power(l2,2)*m1*Power(m2,2)) -
2*dt1*dt2*l1*Power(l2,2)*m1*Power(m2,2) -
Power(dt2,2)*l1*Power(l2,2)*m1*Power(m2,2) -
Power(dt1,2)*Power(l1,2)*l2*m1*Power(m2,2)*Cos(t2) -
g*l1*l2*m1*Power(m2,2)*Cos(t1 + t2) -
g*l1*l2*m1*Power(m2,2)*Sin(t1)*Sin(t2))/
(-(l1*l2*m1*m2) - l1*l2*Power(m2,2)*Power(Sin(t2),2));

```

```
{CALCULO DAS VELOCIDADES ANGULARES DAS MASSAS 1 E 2}
```

```
dt1 := dt1 + deltat * ddt1;
```

```
dt2 := dt2 + deltat * ddt2;
```

```
{CALCULO DOS DESLOCAMENTOS ANGULARES DAS MASSAS 1 E 2}
```

```
t1 := t1 + deltat * dt1;
```

```
t2 := t2 + deltat * dt2;
```

```
{CALCULO DA ORBITA REALIZADA PELAS MASSAS 1 E 2}
```

```
h1x := (-l1 * sin (t1));
```

```
h1y := - (l1 * cos (t1));
```

```
h2x := (-l1 * sin (t1) - l2 * sin (t1 + t2));
```

```
h2y := - (l1 * cos (t1) + l2 * cos (t1 + t2));
```



```

{IMPRESSAO DOS RESULTADOS NA TELA}
gotoxy(1,1);
writeln('*****', ni*nq);
writeln('t: ',t);
writeln;
writeln(t1:5:5,' ',t2:5:5);
writeln(dt1:5:5,' ',dt2:5:5);
writeln(ddt1:5:5,' ',ddt2:5:5);

{ARMAZENAMENTO DOS RESULTADOS NOS ARQUIVOS}
writeln(arq1,t,' ',t1);
writeln(arq2,t,' ',t2);
writeln(arq3,h1x,' ',h1y);
writeln(arq4,h2x,' ',h2y);
end;
end;
close(arq1);close(arq2);close(arq3);close(arq4);

{FIM DO PROGRAMA}
end.

```

□ *Resultados Teórico-experimentais – Verificação Qualitativa*



Figura 1.43
Condição inicial de movimento.

A seguir são apresentados alguns resultados das simulações, as quais podem ser comparadas com os protótipos construídos.

A Figura 1.43 ilustra as condições iniciais de movimento para as massas A e B, posicionadas com ângulo $\theta_1 = -45^\circ = -0,785 \text{ rad}$, $\theta_2 = 45^\circ = 0,785 \text{ rad}$, e com velocidades angulares iniciais nulas, ou seja, $\dot{\theta}_1 = 0 \text{ rad/s}$ e $\dot{\theta}_2 = 0 \text{ rad/s}$. As Figuras 1.44 e 1.45 ilustram simultaneamente o comportamento dos ângulos θ_1 e θ_2 em função do tempo e as órbitas realizadas pelas massas A e B nas respectivas condições.

Os resultados aqui apresentados foram obtidos resolvendo-se as equações de movimento com auxílio do programa computacional apresentado anteriormente.

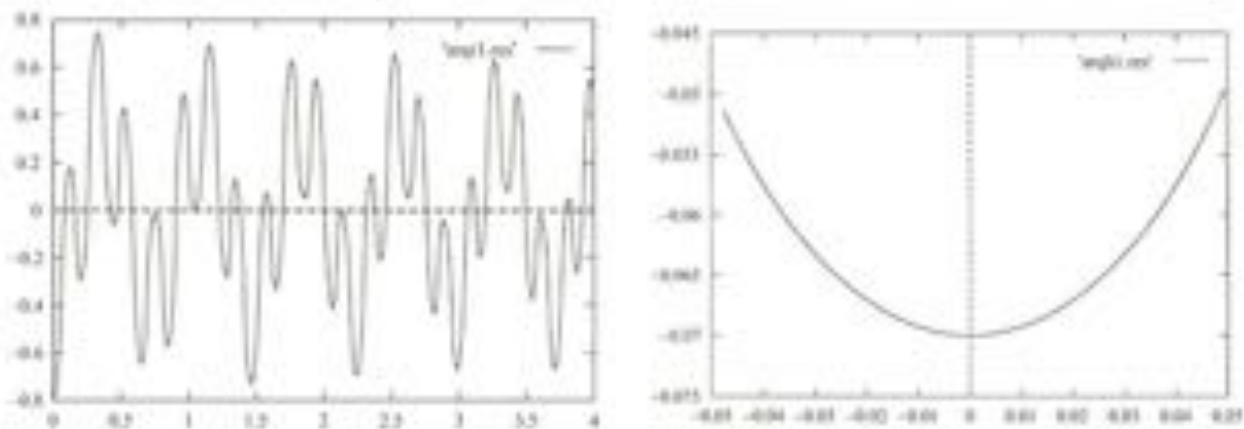


Figura 1.44

Comportamento do ângulo θ_1 em função do tempo e órbita realizada pela massa B.

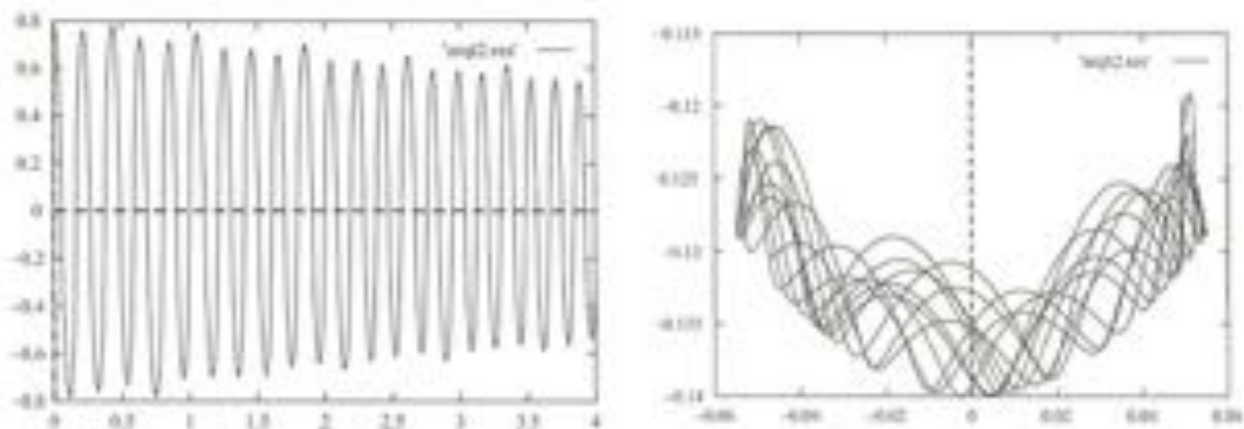


Figura 1.45

Comportamento do ângulo θ_2 em função do tempo e órbita realizada pela massa A.



Figura 1.46

Trajetoória realizada pela massa na extremidade da haste para a condição inicial mencionada anteriormente, ou seja, $\theta_1 = -45^\circ = -0,785 \text{ rad}$, $\theta_2 = 45^\circ = 0,785 \text{ rad}$, $\dot{\theta}_1 = 0 \text{ rad/s}$ e $\dot{\theta}_2 = 0 \text{ rad/s}$ (veja animação no CD-ROM).

**Figura 1.47**

Trajétoria realizada pela massa na extremidade da haste para a condição inicial $\theta_1 = -90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$, $\theta_2 = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$, $\dot{\theta}_1 = 0 \text{ rad/s}$ e $\dot{\theta}_2 = 0 \text{ rad/s}$ (veja animação no CD-ROM).

**Figura 1.48**

Trajétoria realizada pela massa na extremidade da haste para a condição inicial $\theta_1 = 180^\circ = \pi \text{ rad}$, $\theta_2 = 45^\circ = 0,98 \cdot \pi \text{ rad}$, $\dot{\theta}_1 = 0 \text{ rad/s}$ e $\dot{\theta}_2 = 0 \text{ rad/s}$ (veja animação no CD-ROM).

1.10 Programas de Manipulação Simbólica

Como pôde ser observado anteriormente, a manipulação das equações de movimento transforma-se em uma tarefa árdua quanto maior for o número de partículas que compõem o sistema mecânico. A ocorrência de erros durante as passagens matemáticas (derivações, produtos vetoriais, multiplicações matriciais e de matrizes por vetores etc.) é, na maioria dos casos, quase inevitável. Detectam-se esses erros, no entanto, quase sempre em uma fase mais avançada da modelagem matemática: a fase da solução numérica das equações diferenciais de movimento. Durante essa fase, percebem-se, então, os problemas de instabilidade numérica ou de convergência da solução para valores completamente absurdos. Isto faz com que uma revisão do procedimento de cálculo seja necessária. Visando à redução de erros durante as passagens matemáticas, utiliza-se, hoje, software de manipulação simbólica, como o MATHEMATICA ou o MAPLE. Esses software são muito úteis durante o processo de obtenção das equações diferenciais de movimento. A obtenção das equações diferenciais de movimento do pêndulo duplo é apresentada a seguir, para exemplificar a utilização do software MATHEMATICA na Dinâmica de Sistemas de Partículas.

1.10.1 Obtendo as Equações de Movimento do Pêndulo Duplo com o Auxílio do Software MATHEMATICA

Este programa é dedicado ao cálculo das equações de movimento e das reações dinâmicas para o sistema mecânico composto por duas partículas conectadas entre si através de hastes rígidas. O objetivo deste é ilustrar a aplicação de um software de manipulação simbólica nas áreas de Cinemática e Dinâmica de Sistemas Mecânicos. Para entender o programa de forma mais clara aconselha-se acompanhar as etapas mostradas nas páginas 72 a 77.

- Inicialização de um "pacote" que permite a utilização da função Cross (produto vetorial)

```
<<LinearAlgebra`CrossProduct`
```

DEFINIÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE COMO UMA FUNÇÃO DO TEMPO.

- t1 refere-se ao grau de liberdade θ_1 e t2 refere-se ao grau de liberdade θ_2 .

```
t1[t];
```

```
t2[t];
```

MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

- Matriz Tt1 – rotação em torno do eixo Z. A matriz Tt1 faz a transformação de vetores definidos no sistema de referência inercial para a base móvel B1.

```
Tt1 = {{Cos[t1[t]], Sin[t1[t]], 0},
       {Sin[t1[t]], Cos[t1[t]], 0},
       {0, 0, 1}};
MatrixForm[Tt1]
```

$$\begin{matrix} \cos[t_1[t]] & \sin[t_1[t]] & 0 \\ -\sin[t_1[t]] & \cos[t_1[t]] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

7. Matriz Tt2 – rotação em torno do eixo Z1. A matriz Tt2 faz a transformação de vetores definidos na base móvel B1 para a base móvel B2.

$$\begin{matrix} \cos[t_2[t]] & \sin[t_2[t]] & .0 \\ -\sin[t_2[t]] & \cos[t_2[t]] & .0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix};$$

Matrixform[Tt2]

$$\begin{matrix} \cos[t_2[t]] & \sin[t_2[t]] & 0 \\ -\sin[t_2[t]] & \cos[t_2[t]] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

CÁLCULO DOS VETORES DE POSIÇÃO

8. Posição da partícula 1 (ou partícula B) representada na base móvel B1

$$\begin{matrix} B1i1 = \{0, l1, 0\} \\ \{0, l1, 0\} \end{matrix}$$

9. Posição da partícula 2 (ou partícula A) representada na base móvel B2

$$\begin{matrix} B2i2 = \{0, l2, 0\} \\ \{0, l2, 0\} \end{matrix}$$

CÁLCULO DOS VETORES DE VELOCIDADE

10. Velocidades angulares descritas de forma vetorial

$$\begin{matrix} Idt1 = \{0, 0, D[t1[t], t]\} \\ \{0, 0, t1'[t]\} \\ B1dt2 = \{0, 0, D[t2[t], t]\} \\ \{0, 0, t2'[t]\} \end{matrix}$$

11. Velocidades angulares absolutas das bases móveis

$$\begin{matrix} B1W1 = Tt1.Idt1 \\ \{0, 0, t1'[t]\} \\ B2W2 = Tt2.B1dt2 + Tt2.Tt1.Idt1 \\ \{0, 0, t1'[t] + t2'[t]\} \end{matrix}$$

12. Velocidades lineares das partículas representadas em suas respectivas bases B1 e B2

$$\begin{matrix} B1v1 = \{0, 0, 0\} + \text{Cross}[B1W1, B1i1] + D[B1i1, t] \\ \{-l1 t1'[t], 0, 0\} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 B2v2 &= Tt2 \cdot B1v1 + \text{Cross}[B2W2, B2I2] + D[B2I2, t] \\
 &= \{-02 t1'[t]\} - I1 \text{Cos}[t2[t]] t1'[t] - I2 t2'[t], I1 \text{Sin}[t2[t]] t1'[t], 0\}
 \end{aligned}$$

CÁLCULO DOS VETORES DE ACELERAÇÃO

- Acelerações angulares descritas de forma vetorial

$$I1ddt1 = D[I1dt1, t]$$

$$\{0, 0, t1''[t]\}$$

$$B1ddt2 = D[B1dt2, t]$$

$$\{0, 0, t2''[t]\}$$

- Acelerações angulares absolutas das bases móveis representadas nas respectivas bases móveis $B1$ e $B2$

$$B1dW1 = Tt1 \cdot I1ddt1$$

$$\{0, 0, t1''[t]\}$$

$$B2dW2 = Tt2 \cdot B1ddt2 + Tt2 \cdot Tt1 \cdot I1ddt1$$

$$\{0, 0, t1''[t] + t2''[t]\}$$

- Acelerações lineares absolutas das partículas representadas em suas respectivas bases móveis $B1$ e $B2$

$$\begin{aligned}
 B1a1 &= \{ \{0, 0, 0\} + \text{Cross}[B1W1, \text{Cross}[B1W1, B1I1]] + \text{Cross}[B1dW1, B1I1] \\
 &\quad + 2 \cdot \text{Cross}[B1W1, D[B1I1, t]] + D[B1I1, \{t, 2\}] \}
 \end{aligned}$$

$$\{-01 t1' [t], -01 t1' [t]^2, 0\}$$

$$\begin{aligned}
 B2a2 &= (Tt2 \cdot B1a1 + \text{Cross}[B2W2, \text{Cross}[B2W2, B2I2]] + \text{Cross}[B2dW2, B2I2] \\
 &\quad + 2 \cdot \text{Cross}[B2W2, D[B2I2, t]] + D[B2I2, \{-t, 2\}])
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\{-01 \text{Sin}[t2[t]] t1' [t]^2 - I2 t1'' [t] - I1 \text{Cos}[t2[t]] t1'' [t] - \\
 &I2 t2'' [t], - (I2 t1' [t])^2 - I1 \text{Cos}[t2[t]] t1' [t]^2 - \\
 &2 I2 t1' [t] t2' [t] - I2 t2' [t]^2 + I1 \text{Sin}[t2[t]] t1'' [t], 0\}
 \end{aligned}$$

REPRESENTAÇÃO DAS FORÇAS NA FORMA VETORIAL

- Forças peso representadas na base inercial

$$IP1 = \{0, m1 \cdot g, 0\}$$

$$\{0, g \cdot m1, 0\}$$

$$IP2 = \{0, m_2 \cdot g, 0\}$$

$$\{0, g \cdot m_2, 0\}$$

- Forças de reação nas hastes representadas nas respectivas bases móveis $B1$ e $B2$

$$B1T1 = \{0, -T1, 0\}$$

$$\{0, -T1, 0\}$$

$$B2T2 = \{-0, -T2, 0\}$$

$$\{0, -T2, 0\}$$

SOMATÓRIA DE FORÇAS

- Somatória de forças na partícula 1 (ou partícula B)

$$B1SF1 = Tt1 \cdot IP1 + B1T1 - \text{Transpose}[Tt2] \cdot B2T2$$

$$\{g \cdot m1 \cdot \sin[t1[t]] - T2 \cdot \sin[t2[t]], -T1 + g \cdot m1 \cdot \cos[t1[t]] + T2 \cdot \cos[t2[t]], 0\}$$

- Somatória de forças na partícula 2 (ou partícula A)

$$B2SF2 = Tt2 \cdot Tt1 \cdot IP2 + B2T2$$

$$\{g \cdot m2 \cdot (\cos[t2[t]] \cdot \sin[t1[t]] + \cos[t1[t]] \cdot \sin[t2[t]]),$$

$$-T2 + g \cdot m2 \cdot (\cos[t1[t]] \cdot \cos[t2[t]] - \sin[t1[t]] \cdot \sin[t2[t]]), 0\}$$

EQUILÍBRIO DINÂMICO (NEWTON)

- (A) Resolução do sistema utilizando o comando *Solve* do Mathematica

$$\text{Solve}\{\{m1 \cdot B1a1 - B1SF1 == \{0, 0, 0\}, m2 \cdot B2a2 - B2SF2 == \{0, 0, 0\}\}, \\ \{T1, T2, t1''[t], t2''[t]\}$$

- (B) Resolução pelo método de Cramer para sistemas do tipo $Ax = b$

Calculo dos coeficientes da matriz A provenientes das equações de equilíbrio. A matriz A é formada pelos coeficientes que multiplicam as reações dinâmicas e os termos relacionados pelas derivadas de segunda ordem dos graus de liberdade. No caso do pêndulo duplo, esses coeficientes multiplicam os termos $T1$, $T2$ (reações dinâmicas), $t1''[t]$ e $t2''[t]$ (derivada de segunda ordem dos graus de liberdade). Estes termos compõem o vetor x , ou seja, $x = \{T1, T2, t1''[t], t2''[t]\}^T$.

- Coeficiente da matriz $[A]$

$$a11 = \text{Coefficient}[\text{Part}[\text{Expand}[-m1 \cdot B1a1 + B1SF1], 1], T1]$$

$$0$$

$$a12 = \text{Coefficient}[\text{Part}[\text{Expand}[-m1 \cdot B1a1 + B1SF1], 1], T2]$$

$$-\sin[t2[t]]$$

$$a13 = \text{Coefficient}[\text{Part}[\text{Expand}[-m1 \cdot B1a1 + B1SF1], 1], t1''[t]]$$

$$11 \cdot m1$$

$$a_{14} = \text{Coefficient}[\text{Part}[\text{Expand}[-m_1 B_1 a_1 + B_1 S F_1], 1], t_2''[t]]$$

0

$$a_{21} = \text{Coefficient}[\text{Part}[\text{Expand}[-m_1 B_1 a_1 + B_1 S F_1], 2], T_1]$$

-1

$$a_{22} = \text{Coefficient}[\text{Part}[\text{Expand}[-m_1 B_1 a_1 + B_1 S F_1], 2], T_2]$$
 $\text{Cos}[t_2[t]]$

$$a_{23} = \text{Coefficient}[\text{Part}[\text{Expand}[-m_1 B_1 a_1 + B_1 S F_1], 2], t_1''[t]]$$

0

$$a_{24} = \text{Coefficient}[\text{Part}[\text{Expand}[-m_1 B_1 a_1 + B_1 S F_1], 2], t_2''[t]]$$

0

$$a_{31} = \text{Coefficient}[\text{Part}[\text{Expand}[-m_2 B_2 a_2 + B_2 S F_2], 1], T_1]$$

0

$$a_{32} = \text{Coefficient}[\text{Part}[\text{Expand}[-m_2 B_2 a_2 + B_2 S F_2], 1], T_2]$$

0

$$a_{33} = \text{Coefficient}[\text{Part}[\text{Expand}[-m_2 B_2 a_2 + B_2 S F_2], 1], t_1''[t]]$$
 $i_2 m_2 + i_1 m_2 \text{Cos}[t_2[t]]$

$$a_{34} = \text{Coefficient}[\text{Part}[\text{Expand}[-m_2 B_2 a_2 + B_2 S F_2], 1], t_2''[t]]$$
 $i_2 m_2$

$$a_{41} = \text{Coefficient}[\text{Part}[\text{Expand}[-m_2 B_2 a_2 + B_2 S F_2], 2], T_1]$$

0

$$a_{42} = \text{Coefficient}[\text{Part}[\text{Expand}[-m_2 B_2 a_2 + B_2 S F_2], 2], T_2]$$

-1

$$a_{43} = \text{Coefficient}[\text{Part}[\text{Expand}[-m_2 B_2 a_2 + B_2 S F_2], 2], t_1''[t]]$$
 $-(i_1 m_2 \text{Sin}[t_2[t]])$

$$a_{44} = \text{Coefficient}[\text{Part}[\text{Expand}[-m_2 B_2 a_2 + B_2 S F_2], 2], t_2''[t]]$$

0

□ Montagem da matriz [A]

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}\}, \\ \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}\}, \\ \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}\}, \\ \{a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}\} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \{0, -\text{Sin}[t_2[t]], i_1 m_1, 0\}, \{-1, \text{Cos}[t_2[t]], 0, 0\}, \{0, 0, i_2 m_2 + i_1 m_2 \text{Cos}[t_2[t]], i_2 m_2\}, -0, -1, -(i_1 m_2 \text{Sin}[t_2[t]]), 0 \} \right\}$$

- Cálculo do vetor \mathbf{b} proveniente das equações de equilíbrio. O vetor \mathbf{b} é composto por todos os termos das equações de equilíbrio que independem das reações dinâmicas e das derivadas de segunda ordem dos graus de liberdade.

```

b1 =
Coefficient[
Coefficient[
Coefficient[
Coefficient[
Part[Expand[-m1*B1a1 + B1SF1],1]
,T1,0]
,T2,0]
,t1''[t],0]
,t2''[t],0]

```

$$g \ m1 \ \text{Sin}[t1[t]]$$

```

b2 =
Coefficient[
Coefficient[
Coefficient[
Coefficient[
Part[Expand[-m1*B1a1 + B1SF1],2]
,T1,0]
,T2,0]
,t1''[t],0]
,t2''[t],0]

```

$$g \ m1 \ \text{Cos}[t1[t]] + I1 \ m1 \ t1'[t]^2$$

```

b3 =
Coefficient[
Coefficient[
Coefficient[
Coefficient[
Part[Expand[-m2*B2a2 + B2SF2],1]
,T1,0]
,T2,0]
,t1''[t],0]
,t2''[t],0]

```

$$g \ m2 \ \text{Cos}[t2[t]] \ \text{Sin}[t1[t]] + g \ m2 \ \text{Cos}[t1[t]] \ \text{Sin}[t2[t]] + I1 \ m2 \ \text{Sin}[t2[t]] \ t1'[t]^2$$

```

b4 =
Coefficient[
Coefficient[

```

```

Coefficient[
Coefficient[
Part[Expand[-m2*B2a2 + B2SF2], 2]
, T1, 0]
, T2, 0]
, t1''[t], 0]
, t2''[t], 0]
    
```

$$\begin{aligned}
 & g m_2 \cos[t_1[t]] \cos[t_2[t]] - g m_2 \sin[t_1[t]] \sin[t_2[t]] + I_2 m_2 t_1'[t]^2 + \\
 & I_1 m_2 \cos[t_2[t]] t_1'[t]^2 + 2 I_2 m_2 t_1'[t] t_2'[t] + I_2 m_2 t_2'[t]^2
 \end{aligned}$$

- Montagem do vetor b

$$b = \{-b_1, -b_2, -b_3, -b_4\}$$

$$\begin{aligned}
 & \{-(g m_1 \sin[t_1[t]]), -(g m_1 \cos[t_1[t]]) - I_1 m_1 t_1'[t]^2, \\
 & -(g m_2 \cos[t_2[t]] \sin[t_1[t]]) (g m_2 \cos[t_1[t]] \sin[t_2[t]] - \\
 & I_1 m_2 \sin[t_2[t]] t_1'[t]), -(g m_2 \cos[t_1[t]] \cos[t_2[t]]) + \\
 & g m_2 \sin[t_1[t]] \sin[t_2[t]] - I_2 m_2 t_1'[t]^2 - I_1 m_2 \cos[t_2[t]] t_1'[t]^2 - \\
 & 2 I_2 m_2 t_1'[t] t_2'[t] - I_2 m_2 t_2'[t]^2 \}
 \end{aligned}$$

OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO E REAÇÕES DINÂMICAS

- Resolução do sistema pelo método de Cramer

```

T1 = Simplify[Det[
{-b1, a12, a13, a14},
{-b2, a22, a23, a24},
{-b3, a32, a33, a34},
{-b4, a42, a43, a44}]/Det[A]]
    
```

$$\begin{aligned}
 & (2 m_1 (g m_1 \cos[t_1[t]] + g m_2 \cos[t_1[t]]) + I_1 m_1 t_1'[t]^2 + I_1 m_2 t_1'[t]^2 + \\
 & I_2 m_2 \cos[t_2[t]] t_1'[t]^2 + 2 I_2 m_2 \cos[t_2[t]] t_1'[t] t_2'[t] + \\
 & I_2 m_2 \cos[t_2[t]] t_2'[t]^2) / (2 m_1 + m_2 - m_2 \cos[2 t_2[t]])
 \end{aligned}$$

```

T2 = Simplify[Det[
{a11, -b1, a13, a14},
{a21, -b2, a23, a24},
{a31, -b3, a33, a34},
{a41, -b4, a43, a44}]/Det[A]]
    
```


$$\frac{(m_1 m_2 (g \cos[t_1[t]] - t_2'[t]) + g \cos[t_1[t] + t_2[t]] + 2 l_2 t_1'[t] + 2 l_1 \cos[t_2[t]] t_1'[t] + 4 l_2 t_1'[t] t_2'[t] + 2 l_2 t_2'[t])}{(2 m_1 + m_2 - m_2 \cos[2 t_2[t]])}$$

```
t1''[t]=Simplify[Det[{
{a11, a12, -b1, a14},
{a21, a22, -b2, a24},
{a31, a32, -b3, a34},
{a41, a42, -b4, a44}}]/Det[A]]
```

$$\frac{(-2 g m_1 \sin[t_1[t]] - g m_2 \sin[t_1[t]] + g m_2 \sin[t_1[t] + 2 t_2[t]] + 2 l_2 m_2 \sin[t_2[t]] t_1'[t] + l_1 m_2 \sin[2 t_2[t]] t_1'[t] + 4 l_2 m_2 \sin[t_2[t]] t_1'[t] t_2'[t] + 2 l_2 m_2 \sin[t_2[t]] t_2'[t])}{(l_1 (2 m_1 + m_2 - m_2 \cos[2 t_2[t]]))}$$

```
t2''[t]=Simplify[Det[{
{a11, a12, a13, -b1},
{a21, a22, a23, -b2},
{a31, a32, a33, -b3},
{a41, a42, a43, -b4}}]/Det[A]]
```

$$\frac{(-2 g l_2 m_1 \sin[t_1[t]] - g l_2 m_2 \sin[t_1[t]] - g l_1 m_1 \sin[t_1[t] - t_2[t]] - g l_1 m_2 \sin[t_1[t] - t_2[t]] + g l_1 m_1 \sin[t_1[t] + t_2[t]] + g l_1 m_2 \sin[t_1[t] + t_2[t]] + 2 l_1 m_1 \sin[t_2[t]] t_1'[t] + 2 l_1 m_2 \sin[t_2[t]] t_1'[t] + 2 l_2 m_2 \sin[t_2[t]] t_1'[t] + 2 l_1 l_2 m_2 \sin[2 t_2[t]] t_1'[t] + 4 l_2 m_2 \sin[t_2[t]] t_1'[t] t_2'[t] + 2 l_1 l_2 m_2 \sin[2 t_2[t]] t_1'[t] t_2'[t] + 2 l_2 m_2 \sin[t_2[t]] t_2'[t] + l_1 l_2 m_2 \sin[2 t_2[t]] t_2'[t])}{(l_1 l_2 (-2 m_1 - m_2 + m_2 \cos[2 t_2[t]]))}$$

Formatando as equações de movimento e as reações dinâmicas para serem utilizadas em programas escritos nas linguagens C e Pascal.

```
CForm[T1]
```

```
2*m1*(g*m1*cos(t1(t)) + g*m2*cos(t1(t)) +
l1*m1*Power(Derivative(1)(t1)(t),2) +
l1*m2*Power(Derivative(1)(t1)(t),2) +
l2*m2*cos(t2(t))*Power(Derivative(1)(t1)(t),2) +
2*l2*m2*cos(t2(t))*Derivative(1)(t1)(t)*Derivative(1)(t2)(t) +
```

$$\frac{l^2 m_2 \cos(t_2(t)) \text{Power}(\text{Derivative}(1)(t_2)(t), 2)}{(2^*m_1 + m_2 - m_2 \cos(2^*t_2(t)))}$$

CForm[T2]

$$\begin{aligned} & m_1 m_2 (g \cos(t_1(t) - t_2(t)) + g \cos(t_1(t) + t_2(t)) + \\ & 2^*l^2 \text{Power}(\text{Derivative}(1)(t_1)(t), 2) + \\ & 2^*l_1 \cos(t_2(t)) \text{Power}(\text{Derivative}(1)(t_1)(t), 2) + \\ & 4^*l^2 \text{Derivative}(1)(t_1)(t) \text{Derivative}(1)(t_2)(t) + \\ & 2^*l^2 \text{Power}(\text{Derivative}(1)(t_2)(t), 2)) / (2^*m_1 + m_2 - m_2 \cos(2^*t_2(t))) \end{aligned}$$

CForm[t1''[t]]

$$\begin{aligned} & (-2^*g^*m_1 \sin(t_1(t)) - g^*m_2 \sin(t_1(t)) + g^*m_2 \sin(t_1(t) + 2^*t_2(t)) + \\ & 2^*l^2 m_2 \sin(t_2(t)) \text{Power}(\text{Derivative}(1)(t_1)(t), 2) + \\ & l_1^2 m_2 \sin(2^*t_2(t)) \text{Power}(\text{Derivative}(1)(t_1)(t), 2) + \\ & 4^*l^2 m_2 \sin(t_2(t)) \text{Derivative}(1)(t_1)(t) \text{Derivative}(1)(t_2)(t) + \\ & 2^*l^2 m_2 \sin(t_2(t)) \text{Power}(\text{Derivative}(1)(t_2)(t), 2)) / \\ & (l_1^2 (2^*m_1 + m_2 - m_2 \cos(2^*t_2(t)))) \end{aligned}$$

CForm[t2''[t]]

$$\begin{aligned} & (-2^*g^*l^2 m_1 \sin(t_1(t)) - g^*l^2 m_2 \sin(t_1(t)) - g^*l_1^2 m_1 \sin(t_1(t) - t_2(t)) - \\ & g^*l_1^2 m_2 \sin(t_1(t) + t_2(t)) + g^*l_1^2 m_1 \sin(t_1(t) + t_2(t)) + \\ & g^*l_1^2 m_2 \sin(t_1(t) + t_2(t)) + g^*l^2 m_2 \sin(t_1(t) + 2^*t_2(t)) + \\ & 2^* \text{Power}(l_1, 2) m_1 \sin(t_2(t)) \text{Power}(\text{Derivative}(1)(t_1)(t), 2) + \\ & 2^* \text{Power}(l_1, 2) m_2 \sin(t_2(t)) \text{Power}(\text{Derivative}(1)(t_1)(t), 2) + \\ & 2^* \text{Power}(l_2, 2) m_2 \sin(t_2(t)) \text{Power}(\text{Derivative}(1)(t_1)(t), 2) + \\ & 2^*l_1^2 l^2 m_2 \sin(2^*t_2(t)) \text{Power}(\text{Derivative}(1)(t_1)(t), 2) + \\ & 4^* \text{Power}(l_2, 2) m_2 \sin(t_2(t)) \text{Derivative}(1)(t_1)(t) \text{Derivative}(1)(t_2)(t) + \\ & 2^*l_1^2 l^2 m_2 \sin(2^*t_2(t)) \text{Derivative}(1)(t_1)(t) \text{Derivative}(1)(t_2)(t) + \\ & 2^* \text{Power}(l_2, 2) m_2 \sin(t_2(t)) \text{Power}(\text{Derivative}(1)(t_2)(t), 2) + \\ & l_1^2 l^2 m_2 \sin(2^*t_2(t)) \text{Power}(\text{Derivative}(1)(t_2)(t), 2)) / \\ & (l_1^2 l^2 (-2^*m_1 - m_2 + m_2 \cos(2^*t_2(t)))) \end{aligned}$$

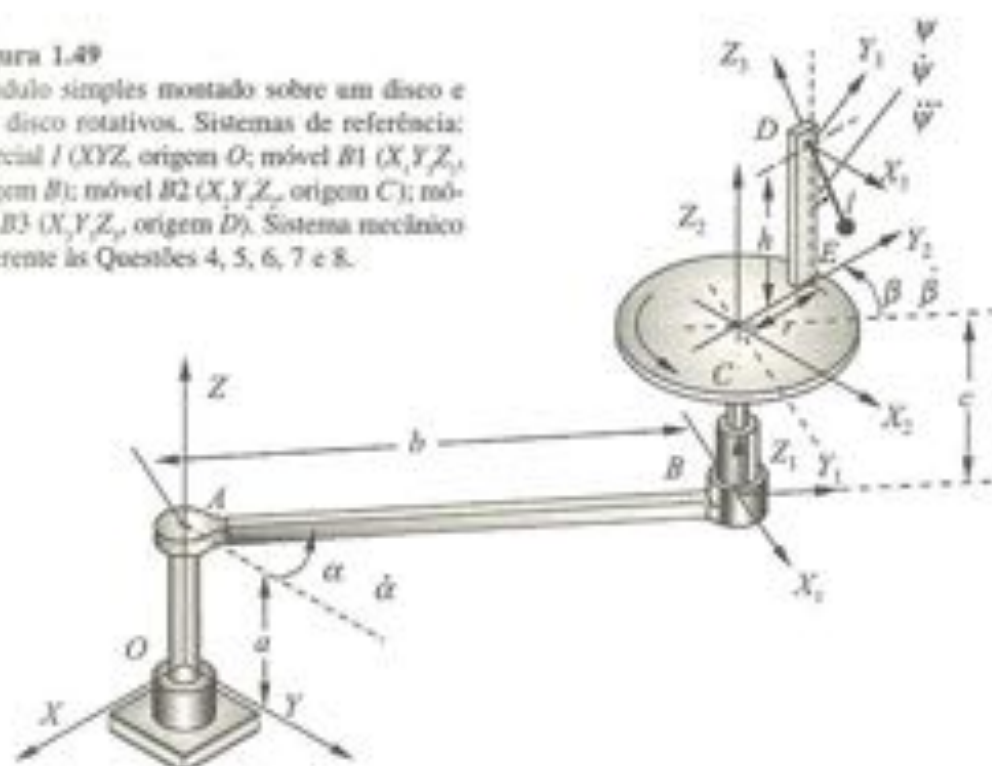
OBSERVAÇÃO: Caso as soldas anteriores sejam utilizadas em programas escritos em Pascal, é necessária a criação da função Power (vide listagem do programa na página 79).

1.11 Exercícios Propostos

1. Explique as vantagens de utilizar sistemas móveis de referência.
2. Explique o que acontece quando um vetor é descrito em um sistema móvel de referência girante e efetua-se sua derivada no domínio do tempo.
3. O que é necessário definir antes de falar em velocidade relativa?

Figura 1.49

Pêndulo simples montado sobre um disco e um disco rotativos. Sistemas de referência: Inercial I (XYZ , origem O); móvel $B1$ (X_1, Y_1, Z_1 , origem B); móvel $B2$ (X_2, Y_2, Z_2 , origem C); móvel $B3$ (X_3, Y_3, Z_3 , origem D). Sistema mecânico referente às Questões 4, 5, 6, 7 e 8.



A Figura 1.49 refere-se às questões de 4 a 8. Ela ilustra um pêndulo simples montado na extremidade de um disco. Tanto o disco como o braço giram com uma velocidade angular constante ($\dot{\alpha}$ e $\dot{\beta}$ são constantes).

- Defina a velocidade angular absoluta dos sistemas $B1$, $B2$ e $B3$, ou seja, Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 , representando-as nas respectivas bases $B1$, $B2$ e $B3$.
- Calcule a velocidade relativa da partícula E em relação à origem do sistema móvel $B3$, representando esta velocidade relativa com auxílio da base $B3$.
- Calcule a velocidade relativa da partícula E em relação à origem do sistema móvel $B2$, representando esta velocidade relativa com auxílio da base $B2$.
- Calcule a velocidade relativa da partícula E em relação à origem do sistema móvel $B1$, representando esta velocidade relativa com auxílio da base $B1$.
- Calcule a velocidade relativa da partícula E em relação à origem do sistema inercial I , representando esta velocidade relativa usando a base inercial. O que se pode concluir sobre a velocidade relativa de E em relação à origem do sistema inercial?
- Desenhe o vetor de velocidade relativa da massa m em relação à origem do sistema móvel $B1$ (X_1, Y_1, Z_1) em cada um dos instantes mostrados no desenho da Figura 1.50. A base $B1$ gira com velocidade angular constante, $\dot{\theta} = \{0 \ 0 \ \dot{\theta}\}^T$.

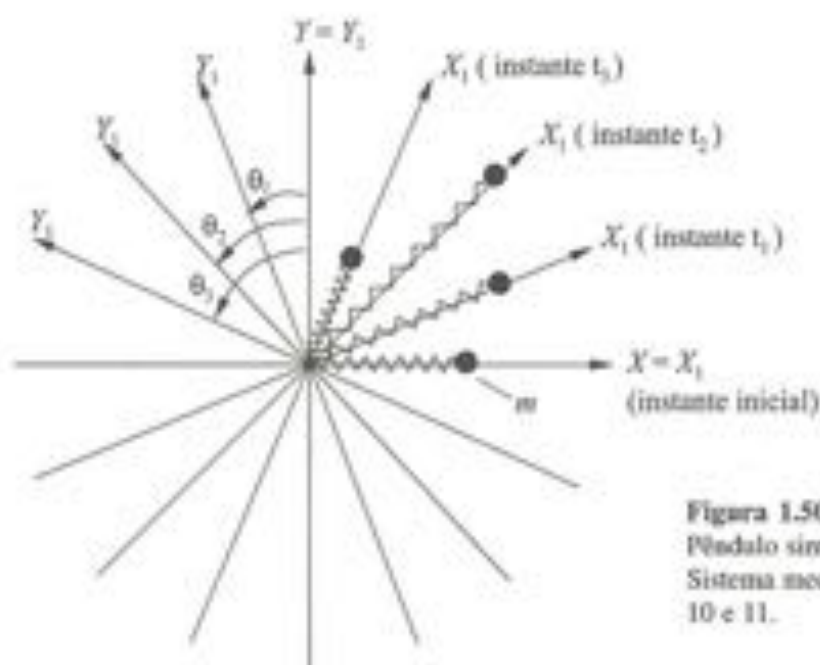


Figura 1.50
Pêndulo simples com partícula presa à mola.
Sistema mecânico referente às Questões 9,
10 e 11.

10. Analisando-se o comportamento do vetor de velocidade relativa desenhado por você na Questão 9, o que acontece com esse vetor em termos de direção? Qual o tipo de aceleração gerada?
11. Analisando-se o comportamento do vetor de velocidade relativa desenhado por você na Questão 9, o que acontece com esse vetor em termos de amplitude? Qual o tipo de aceleração gerada?

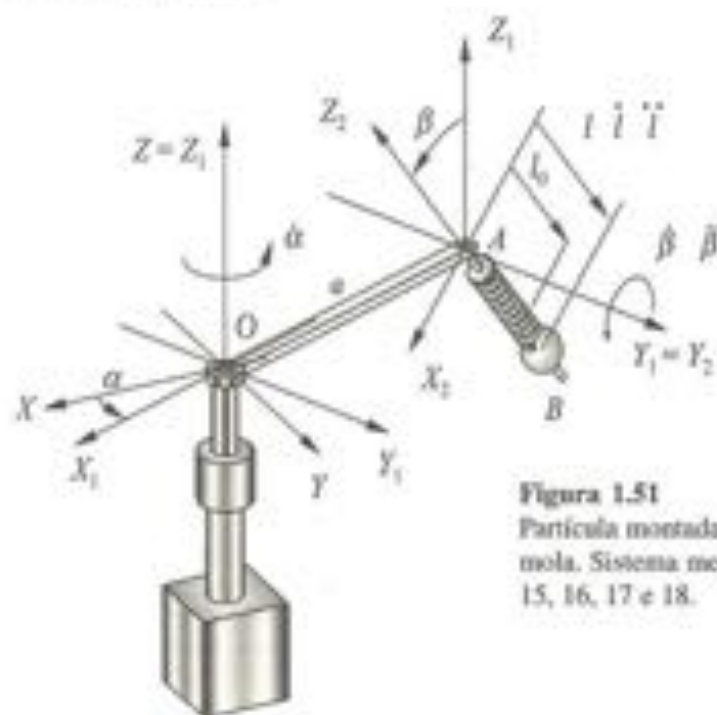


Figura 1.51
Partícula montada em um braço rotativo através de uma
mola. Sistema mecânico referente às Questões 12, 13, 14,
15, 16, 17 e 18.

A Figura 1.51 ilustra um pêndulo com mola montado na extremidade de um braço. O braço gira com uma velocidade angular $\dot{\alpha}$ constante. A mola possui uma constante de elasticidade k e o atrito entre a partícula B e a haste sobre a qual ela desliza é desprezível.

12. Defina da forma mais conveniente (em sua opinião) os sistemas de referência móvel do problema mostrado na Figura 1.51.
13. Calcule as matrizes de transformação de coordenadas entre os sistemas de referência definidos na Questão 12.
14. Calcule as velocidades angulares absolutas dos sistemas de referência definidos por você (vide Figura 1.51).
15. Calcule a velocidade linear relativa da partícula B , mostrada na Figura 1.51, em relação à origem dos vários sistemas móveis de referência definidos por você.
16. Calcule a velocidade linear absoluta da partícula B , mostrada na Figura 1.51, em dois sistemas de referência diferentes, sendo um deles o inercial.
17. Calcule a aceleração linear absoluta da partícula B , representando-a em dois sistemas de referência, sendo um deles o inercial.
18. Calcule as equações de movimento da partícula e as respectivas reações pelo método de Newton.

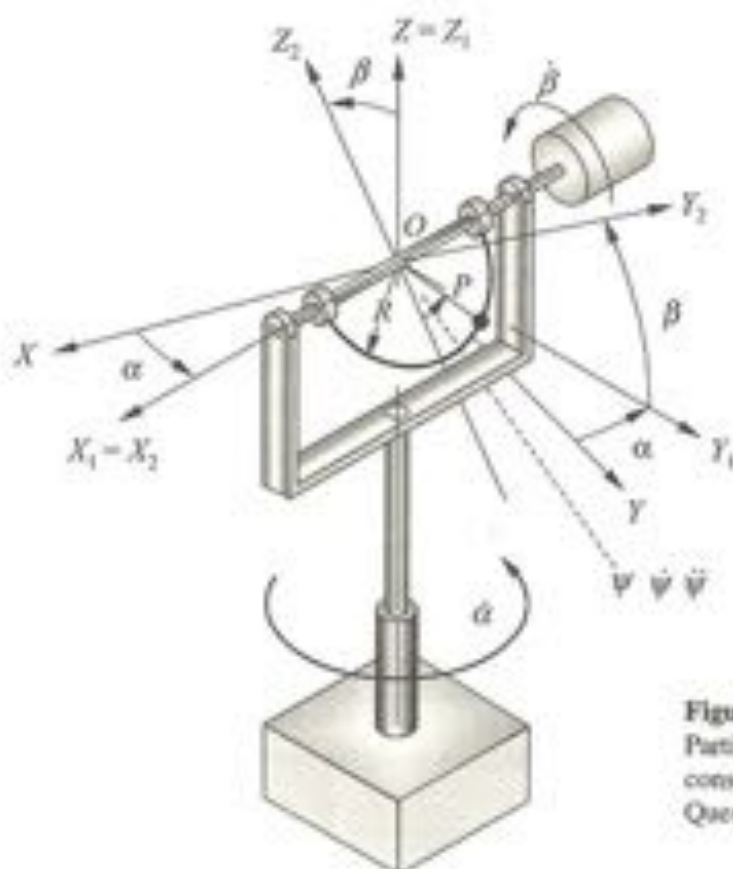


Figura 1.52
Partícula executando várias rotações consecutivas. Sistema mecânico referente às Questões 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26 e 27.

Na Figura 1.52 que está relacionada às Questões 19 a 27, um motor elétrico aciona o corpo 1 com uma velocidade angular $\dot{\alpha}$ constante. Outro motor elétrico acoplado ao corpo 1 aciona o corpo 2 com uma velocidade angular $\dot{\beta}$ constante. Uma partícula P escorrega sobre o corpo 2 com uma velocidade e aceleração angular $\dot{\psi}$, como mostrado na Figura 1.52. O raio R do corpo 2 é constante e assume-se que o atrito entre a partícula P e o cano circular 2 é desprezível.

19. Calcule as matrizes de transformação de coordenadas entre os sistemas móveis e o sistema inercial, mostrados na Figura 1.52.
20. Calcule a velocidade angular absoluta dos sistemas móveis $B1$ e $B2$, mostradas na Figura 1.52, representando-as nos respectivos sistemas, ou seja, ${}_{B1}\Omega_1$ e ${}_{B2}\Omega_2$.
21. Calcule a velocidade relativa da partícula P em relação à origem do sistema $B2$, representando-a com auxílio da base $B2$.
22. Calcule a velocidade relativa da partícula P em relação à origem do sistema $B1$, representando-a com auxílio da base $B1$.
23. Calcule a velocidade absoluta da partícula P representando-a no sistema móvel $B2$.
24. Supondo que o motor fixo no corpo 1 seja travado quando $\dot{\beta} = 0$, ou seja $\dot{\beta} = 0$, calcule a aceleração linear absoluta da partícula P , representando na figura cada uma das componentes da equação na base móvel $B2$.
25. Construa o DCL para a partícula mostrada na Figura 1.52 e represente as forças de forma vetorial no sistema de coordenadas mais conveniente.
26. Determine as equações ou equação de movimento e as reações dinâmicas para a partícula P , mostrada na Figura 1.52, utilizando-se os cálculos anteriores, apresentados nas Questões 19 a 25.
27. Explique como resolver as equações ou a equação de movimento obtida na Questão 26.

A Figura 1.53 refere-se às Questões 28 a 34. O disco mostrado na Figura 1.53 opera com um torque motor, de tal forma que a velocidade angular $\dot{\alpha}$ é constante. Na extremidade do disco de raio b , uma haste é montada com ângulo β_0 constante. A haste tem comprimentos c e d . Na extremidade da haste acopla-se um disco de raio r , o qual também é acionado por um outro motor elétrico, de tal forma que a velocidade angular $\dot{\phi}$ é também mantida constante. Na extremidade do disco são soldadas duas hastes rígidas. Nas extremidades das hastes são fixadas duas partículas de massa m_e e m_f . Considera-se o coeficiente de atrito entre a massa m_f e a haste como tendo o valor μ , a qual desliza ao longo da haste. A massa m_e é fixa na extremidade da outra haste. A distância entre os pontos O e A é H [m]. A distância entre os pontos A e B é R [m]. A distância entre os pontos B e C é h [m]. A distância entre os pontos C e D é s [m]. O disco acoplado na extremidade D tem um raio r [m]. A partícula E está soldada à haste superior, a qual tem um comprimento e [m]. A partícula F está acoplada a uma mola de constante elástica k [N/m]. A distância entre o início da haste e a partícula F é dada por $l(t)$ [m], e o comprimento inicial da mola sem carregamento é l_0 [m].

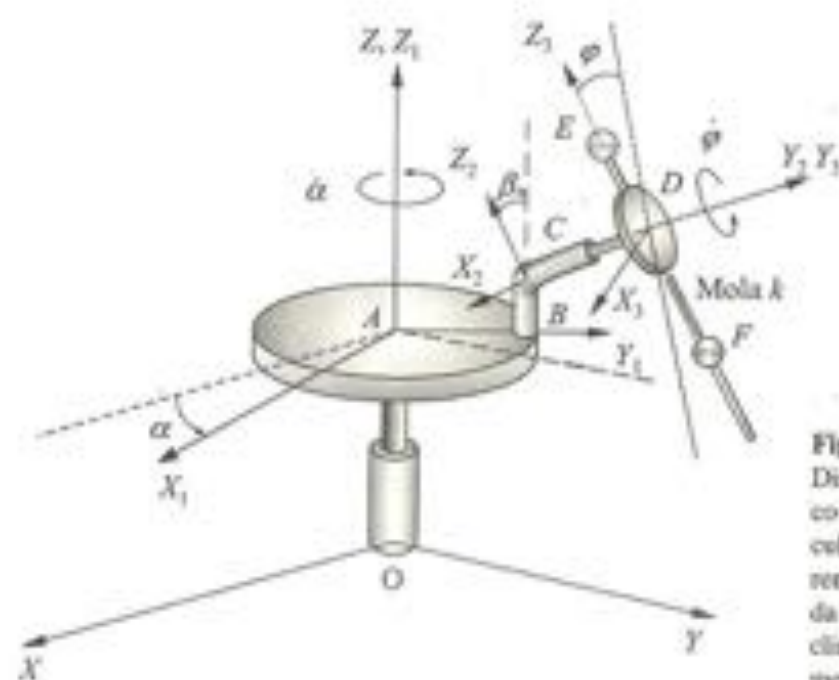


Figura 1.53

Disco rotativo acoplado a um outro disco rotativo inclinado, onde duas partículas são montadas de manjeiras diferentes: partícula E soldada à haste rígida e partícula F acoplada ao disco inclinado através de uma mola. Sistema mecânico referente às Questões 28, 29, 30, 31, 32, 33 e 34.

28. Calcule as matrizes de transformação de coordenadas para os sistemas de referência mostrados na Figura 1.53: Inercial – XYZ (origem O); $B1 - X_1Y_1Z_1$ (origem A); $B2 - X_2Y_2Z_2$ (origem C); $B3 - X_3Y_3Z_3$ (origem D).
29. Calcule os vetores de posição $\mathbf{r}_{OA}, \mathbf{r}_{AB}, \mathbf{r}_{BC}, \mathbf{r}_{CD}, \mathbf{r}_{DE}, \mathbf{r}_{DF}$ de acordo com a Figura 1.53, e represente-os no sistema de referência mais adequado.
30. Calcule os vetores de velocidade $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C, \mathbf{v}_D, \mathbf{v}_E, \mathbf{v}_F$ de acordo com o sistema mecânico mostrado na Figura 1.53, e represente-os no sistema de referência mais adequado.
31. Calcule os vetores de aceleração $\mathbf{a}_A, \mathbf{a}_B, \mathbf{a}_C, \mathbf{a}_D, \mathbf{a}_E, \mathbf{a}_F$ de acordo com o sistema mecânico mostrado na Figura 1.53, e represente-os no sistema de referência mais adequado.
32. Faça o diagrama de corpo livre das partículas E e F mostradas na Figura 1.53.
33. Considerando-se o equilíbrio dinâmico das partículas E e F , quantas equações de movimento e quantas reações dinâmicas são obtidas?
34. Obtenha as equações diferenciais de movimento que descrevem o comportamento dinâmico das partículas, e discuta os resultados.



Capítulo 2

Cinemática e Cinética de Corpos Rígidos

Em muitas situações práticas, as dimensões de um corpo rígido não podem ser desprezadas pelo fato de as forças externas atuantes sobre o mesmo não serem aplicadas sobre um mesmo ponto do corpo, gerando, nestes casos, uma rotação do corpo rígido em relação a algum ponto. Este ponto (centro de rotação) pode ou não pertencer ao corpo. Isto inviabiliza a representação do corpo pelo modelo de massa pontual ou partícula, e a utilização de tal hipótese leva a resultados errôneos no que diz respeito à dinâmica dos movimentos e das forças envolvidas na realização dos mesmos. Necessita-se, então, de mais informações a respeito dos movimentos de rotação do corpo e de sua distribuição de massa ao longo dos eixos de referência, pois, como será mostrado adiante, um corpo rígido é simplesmente um conjunto de infinitas partículas de massa infinitesimal.

Neste capítulo apresenta-se o cálculo de grandezas físicas como: velocidade linear \mathbf{v}^* e aceleração linear \mathbf{a}^* , ambas do centro de massa dos mesmos corpos; velocidade angular ω e aceleração angular $\dot{\omega}$ dos mesmos. Essas grandezas físicas são calculadas com base nas relações geométricas dos movimentos, levando-se em consideração as restrições físicas e os vínculos cinemáticos de cada corpo. Em seguida calculam-se grandezas físicas como a quantidade de movimento linear $\mathbf{J} = m\mathbf{v}^*$ e a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G = \mathbf{I}_G\omega$ com base nas velocidades lineares e angulares, \mathbf{v} e ω do corpo, da massa total m e dos momentos e produtos de inércia de massa em relação ao sistema de referência móvel \mathcal{B}_G (solidário ao corpo) com velocidade angular Ω , os quais compõem o tensor de inércia do corpo \mathbf{I}_G , no referencial móvel \mathcal{B}_G . Consegue-se, desta forma, os subsídios básicos para o levantamento das equações diferenciais, que descrevem os movimentos dos corpos rígidos e das forças de reação nos vínculos ou pontos de conexão do sistema de corpos rígidos, com base nos princípios e axiomas da dinâmica:

NEWTON (no sistema inercial I):

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt}(m \cdot \mathbf{v}^*) = \dot{m} \cdot \mathbf{v}^* + m \cdot \mathbf{a}^*$$

EULER (no sistema móvel B solidário ao corpo):

$$\sum_{i=1}^n {}_B M_i = \frac{d}{dt} ({}_B H_i) + {}_B \Omega \times {}_B H_i = {}_B I_i \cdot \frac{d}{dt} ({}_B \omega) + {}_B \Omega \times ({}_B I_i \cdot {}_B \omega) + m {}_B \rho_0^* \times {}_B a_i$$

Resumindo-se, este capítulo é, dedicado ao estado da cinemática e da cinética de corpos rígidos, abordando também as propriedades geométricas dos corpos rígidos.

2.2 Cinemática de Corpos Rígidos

Observou-se, no capítulo anterior, muitos casos nos quais os corpos podiam ser modelados como partículas. Isto nem sempre pode ser feito sem que se cometam erros na descrição dos movimentos e no cálculo de reações dinâmicas. Em muitos casos práticos, as dimensões dos corpos não podem ser desprezadas, o que leva à inclusão dos movimentos de rotação dos corpos em estudo. Trabalha-se, então, nesses casos, com seis equações para o equilíbrio do corpo, três relacionadas com os movimentos de translação e 3 relacionadas com os movimentos de rotação, pensando-se em movimentos espaciais. No plano, por sua vez, estas equações se reduzem a três equações: duas equações para a translação e uma para a rotação.

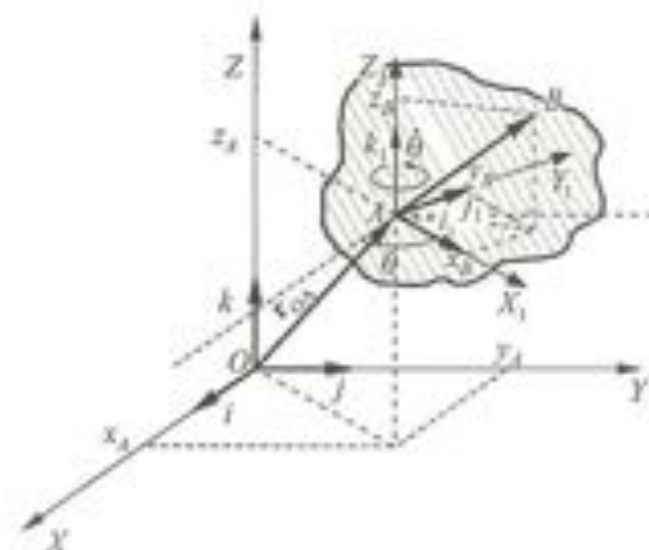


Figura 2.1

Sistema de referência inercial I e sistema móvel B ; sistema móvel B fixo ao corpo, realizando os mesmos movimentos do corpo (translação e rotação em torno de Z), sendo ${}_B \omega = \{0 \ 0 \ \dot{\theta}\}$.

Imagine que um sistema de referência móvel, solidário ao corpo, gira com uma velocidade angular ω , como é mostrado na Figura 2.1. Isto significa que as velocidades angulares do corpo e do sistema móvel são iguais. A determinação do movimento do corpo é realizada pelo cálculo direto dos deslocamentos absolutos e de suas derivadas em relação ao tempo. As velocidades e as acelerações, tanto lineares como angulares, envolvidas no movimento de um ponto do corpo rígido, podem ser obtidas por diferenciação direta das equações para os deslocamentos:

$${}_I \mathbf{v}_B = \frac{d}{dt}({}_I \mathbf{r}_{OB})$$

$${}_I \mathbf{a}_B = \frac{d^2}{dt^2}({}_I \mathbf{r}_{OB})$$

Utilizando-se os conceitos de sistemas móveis de referência, pode-se também escrever que:

$${}_I \mathbf{v}_B = {}_I \mathbf{v}_A + {}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{r}_{AB} + {}_I \mathbf{v}_{B|I} \quad (2.1)$$

Ou seja, a velocidade absoluta de um ponto do corpo (no caso do ponto B) é igual à soma da velocidade de translação do ponto A , também pertencente ao corpo, onde a origem do sistema móvel foi posicionada, mais o produto vetorial da velocidade angular do corpo (que é igual à do sistema móvel) pelo vetor posição, com origem em A e indo até B , mais a velocidade relativa do ponto B em relação a A , definida como a derivada do vetor posição ${}_B \mathbf{r}_{AB}$ em relação ao tempo, quando este é descrito no sistema móvel, ou seja:

$${}_I \mathbf{v}_B = {}_I \mathbf{v}_A + {}_I \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{T}_B^T {}_B \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{T}_B^T \frac{d}{dt}({}_B \mathbf{r}_{AB})$$

Quanto à aceleração de um ponto B qualquer do corpo, continua valendo a expressão:

$${}_I \mathbf{a}_B = {}_I \mathbf{a}_A + {}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{r}_{AB} + {}_I \dot{\boldsymbol{\omega}} \times {}_I \mathbf{r}_{AB} + 2 \cdot {}_I \boldsymbol{\omega} \times {}_I \mathbf{v}_{B|I} + {}_I \mathbf{a}_{B|I} \quad (2.2)$$

Esta é calculada ao se derivar a equação da velocidade.

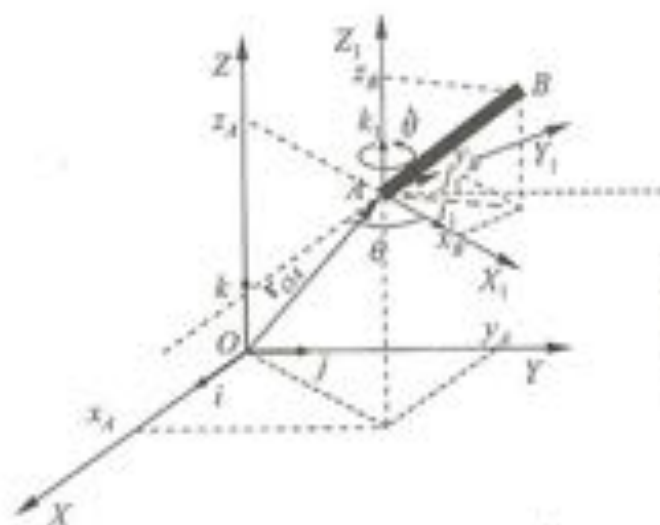


Figura 2.2
Viga modelada como um corpo rígido:

$${}_I \mathbf{v}_{B|I} = \mathbf{T}_B^T \frac{d}{dt}({}_B \mathbf{r}_{AB}) = 0$$

No entanto, assumir, por hipótese, que um corpo é rígido significa, matematicamente, que a distância entre dois pontos A e B quaisquer pertencentes a um mesmo corpo ${}_B \mathbf{r}_{AB}$ permanece sempre constante quando este vetor é representado no sistema móvel solidário ao corpo, ou seja, ${}_B \mathbf{r}_{AB}$ é constante, pois não varia nem em direção, nem em módulo.

A representação desse vetor ${}_B\mathbf{r}_{AB}$ no sistema inercial implicaria o fato de esse vetor apresentar uma variação em relação a sua direção. Logo, utilizando-se a própria definição de velocidade relativa para um corpo rígido, tem-se:

$${}_I\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{T}_B^T \cdot \frac{d}{dt}({}_B\mathbf{r}_{AB}) = 0$$

$${}_I\mathbf{a}_{rel} = \mathbf{T}_B^T \cdot \frac{d^2}{dt^2}({}_B\mathbf{r}_{AB}) = 0$$

Resalta-se aqui que os termos de velocidade relativa e aceleração relativa só deverão aparecer no sistema de referência solidário a um corpo rígido quando os movimentos dos outros corpos rígidos forem descritos em relação a este, e deslizamentos relativos entre os mesmos forem detectados, como é o caso de muitos mecanismos nos quais existem deslizamentos entre seus componentes. Para a maioria dos problemas, no entanto, escolhe-se um sistema móvel de referência solidário ao corpo, ou seja, fixo ao corpo, o que faz com que os movimentos relativos entre dois pontos do mesmo corpo desapareçam, pois a distância entre esses dois pontos não varia. No caso de um corpo flexível, a distância não permanece mais constante e passa a ser descrita em função da elasticidade do material do corpo.

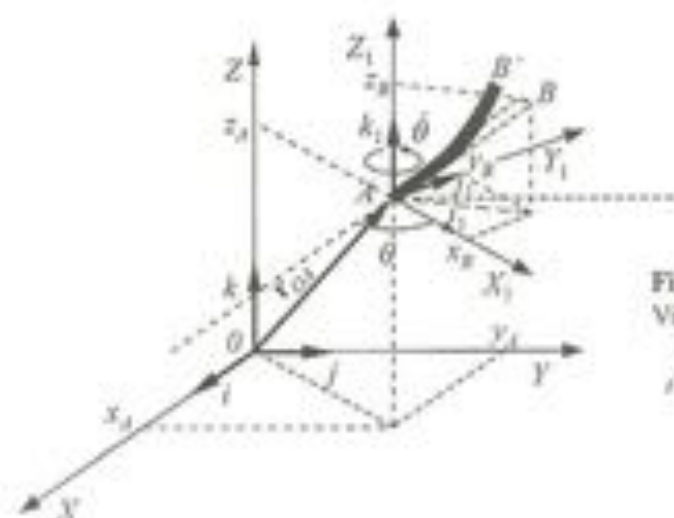


Figura 2.3
Viga modelada como um corpo flexível:

$${}_I\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{T}_B^T \cdot \frac{d}{dt}({}_B\mathbf{r}_{AB}) \neq 0$$

Assim, para dois pontos A e B pertencentes a um mesmo corpo rígido, escrevem-se, com o auxílio de um sistema móvel solidário ao corpo, as equações:

$${}_I\mathbf{v}_B = {}_I\mathbf{v}_A + {}_I\dot{\theta} \times {}_I\mathbf{r}_{AB} \quad \rightarrow \mathbf{v}_{rel} = 0$$

$${}_I\mathbf{a}_B = {}_I\mathbf{a}_A + {}_I\dot{\theta} \times {}_I\mathbf{r}_{AB} + {}_I\dot{\theta} \times {}_I\dot{\theta} \times {}_I\mathbf{r}_{AB} \quad \rightarrow \mathbf{a}_{rel} = \mathbf{a}_{rel} = 0$$

2.3 Cinética de Corpos Rígidos

Como foi mencionado, um corpo rígido pode ser idealizado como um conjunto de partículas, no qual a distância entre as mesmas permanece sempre constante. Nesta seção dedu-

zem-se as equações para as forças e momentos resultantes sobre um corpo rígido, partindo-se do conceito de quantidade de movimento linear e angular de uma partícula.

2.3.1 Quantidade de Movimento Linear de um Corpo Rígido

Para um sistema de partículas composto por n partículas de massa m_i ($i = 1, \dots, n$), como é mostrado na Figura 2.4, pode-se definir seu centro de massa r^* com o auxílio da equação

$$\sum_{i=1}^n (m_i, r_i) = \sum_{i=1}^n m_i, r^* = m, r^* \Rightarrow, r^* = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i, r_i)}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2.3)$$

Resalte-se aqui que, a partir de agora, sempre que o símbolo * for encontrado, tem-se em mente o centro de massa do sistema de partículas ou do corpo rígido. Com o auxílio da derivada da Equação 2.3 em função do tempo, obtém-se o vetor de quantidade de movimento linear J do sistema de partículas e de seu respectivo centro de massa:

$$\begin{aligned} {}_i J &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n (m_i, r_i) \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i, r^* \right) = \frac{d}{dt} (m, r^*) \\ {}_i J &= \sum_{i=1}^n \left(m_i \frac{d}{dt} (, r_i) \right) = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \frac{d}{dt} (, r^*) = m, v^* \\ {}_i J &= \sum_{i=1}^n (m_i, v_i) = m, v^* \end{aligned} \quad (2.4)$$

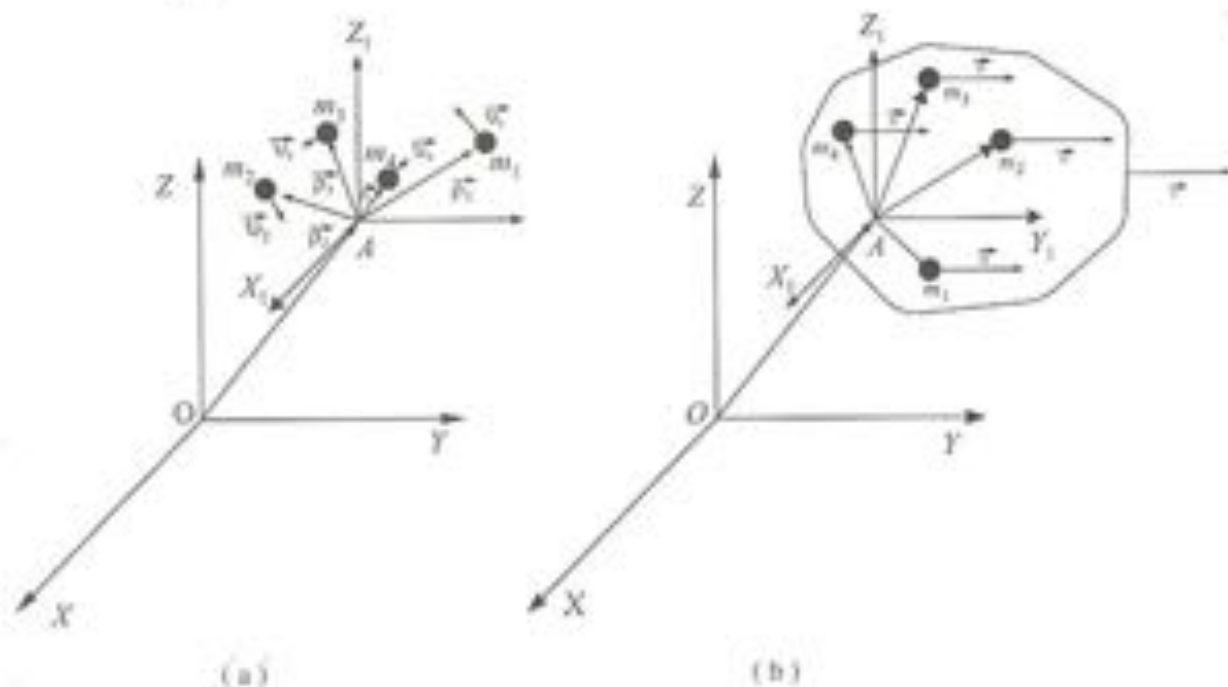


Figura 2.4
(a) Quantidade de movimento de um sistema de partículas livres. (b) Quantidade de movimento de um sistema de partículas, as quais compõem um corpo rígido.

A Equação 2.4 fornece uma informação muito importante e útil: a quantidade de movimento linear de um sistema de partículas é igual à quantidade de movimento linear de seu centro de massa. Assim, a partir deste instante, considerando-se um corpo rígido como um sistema de infinitas partículas de massa infinitesimal, seu movimento de translação será sempre definido pelo movimento de seu centro de massa.

2.3.2 Variação na Quantidade de Movimento Linear

Baseado na segunda lei de Newton, pode-se, então, escrever que a quantidade de movimento linear de um corpo rígido, ou seja, de um sistema de partículas representado pelo centro de massa \mathbf{r}^* , só poderá ser alterado mediante a aplicação de forças externas sobre o mesmo. Logo:

$$\sum_{j=1}^s {}_j\mathbf{F}_j = \frac{d}{dt}(m {}_I\mathbf{v}^*) \quad (2.5)$$

Expandindo-se a Equação 2.5, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^s {}_j\mathbf{F}_j = \frac{d}{dt}(m) {}_I\mathbf{v}^* + m \frac{d}{dt}({}_I\mathbf{v}^*) = \dot{m} {}_I\mathbf{v}^* + m {}_I\mathbf{a}^*$$

em que s é o número total de forças externas ${}_j\mathbf{F}_j$ aplicadas sobre o corpo isolado de seus vínculos ou pontos de contato. O número s de forças externas atuantes sobre o corpo pode ser facilmente obtido fazendo-se o diagrama de corpo livre do corpo em análise. O vetor ${}_I\mathbf{a}^*$ representa a aceleração linear absoluta do centro de massa do corpo, pois a derivada da quantidade de movimento foi realizada no sistema inercial. Uma vez que o corpo é considerado rígido e as partículas que compõem o corpo permanecem sempre contidas no volume de contorno, que define o corpo rígido, não existe variação de massa em função do tempo, ou seja, $\dot{m} = 0$. Logo:

$$\sum_{j=1}^s {}_j\mathbf{F}_j = m {}_I\mathbf{a}^* \quad (2.6)$$

Essa equação é utilizada quando não existe variação de massa ao longo do tempo e é de muita valia para o cálculo das forças de reação atuantes sobre o corpo, as quais dependerão sempre do tempo e da posição do corpo, no caso de este se movimentar com aceleração linear diferente de zero.

Com o auxílio de sistemas móveis de referência, pode-se escrever a aceleração do centro de massa do corpo de acordo com a Equação 2.2, chegando-se a:

$$\sum_{j=1}^s {}_j\mathbf{F}_j = m ({}_I\mathbf{a}_A + {}_I\dot{\omega} \times {}_I\mathbf{r}_{AB} + {}_I\omega \times ({}_I\dot{\omega} \times {}_I\mathbf{r}_{AB}) + 2 \cdot {}_I\omega \times {}_I\mathbf{v}_{Rel} + {}_I\mathbf{a}_{Rel}) \quad (2.7)$$

em que A é o ponto onde o sistema móvel foi posicionado e B é o centro de massa do corpo. Fazendo-se ${}_I\mathbf{r}_{AB} = {}_I\mathbf{r}^*$, tem-se:

$$\sum_{j=1}^s {}_j\mathbf{F}_j = m \left({}_I\mathbf{a}_A + {}_I\dot{\omega} \times {}_I\mathbf{r}^* + {}_I\omega \times ({}_I\dot{\omega} \times {}_I\mathbf{r}^* + \underbrace{2 \cdot {}_I\omega \times {}_I\mathbf{v}_{Rel}}_{=0} + \underbrace{{}_I\mathbf{a}_{Rel}}_{=0}) \right) \quad (2.8)$$

2.3.3 Quantidade de Movimento Angular de um Corpo Rígido

O objetivo dos itens 2.3.3 a 2.3.6 é a obtenção das relações entre os movimentos angulares e os momentos externos aplicados sobre um corpo rígido. Partindo-se da definição do vetor de quantidade de movimento angular para uma partícula, pretende-se chegar a uma equação que forneça a quantidade de movimento angular de um corpo rígido, considerado como um sistema de infinitas partículas de massa infinitesimal.

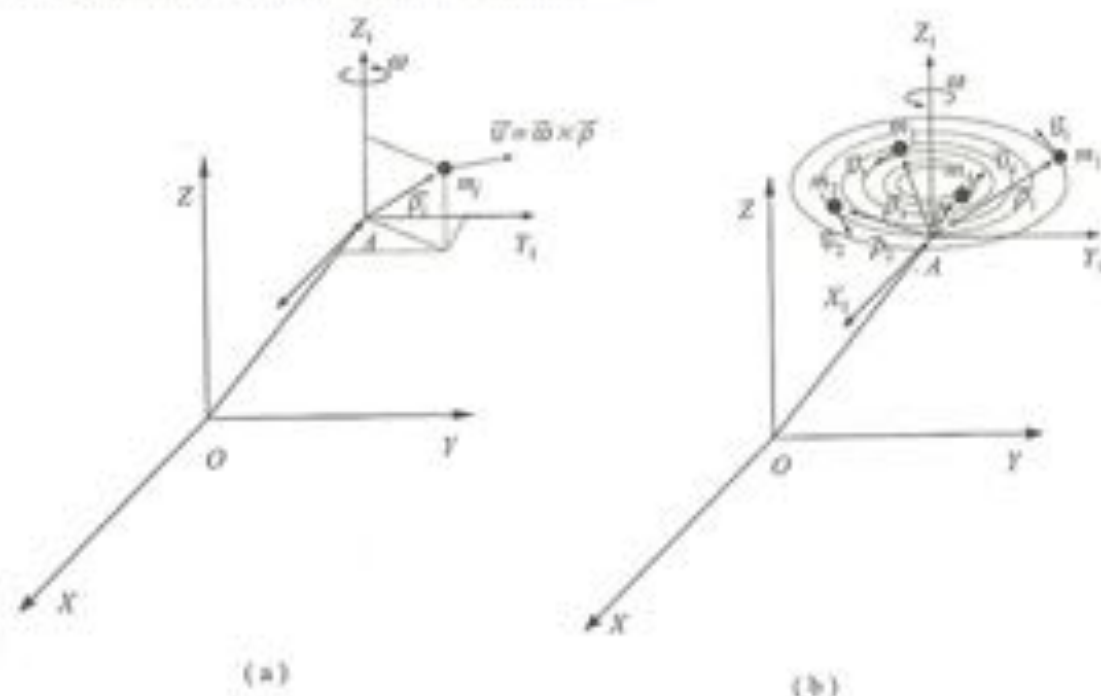


Figura 2.5

(a) Quantidade de movimento angular de uma partícula. (b) Quantidade de movimento angular de um sistema de partículas.

Definindo-se o vetor de quantidade de movimento angular de uma partícula i , em relação a um ponto A qualquer, como o produto vetorial entre o vetor ρ_i (com a origem no ponto A indo até a posição da partícula de massa m_i – ver Figura 2.5(a)) e o vetor de quantidade de movimento linear \mathbf{J}_i da partícula i , escreve-se que:

$${}_i\mathbf{H}_A = {}_i\rho_i \times ({}_i\mathbf{J}_i) = {}_i\rho_i \times (m_i \mathbf{v}_i)$$

Para um sistema de n partículas tem-se que a quantidade de movimento angular é dada pela somatória da quantidade de movimento angular de cada partícula que compõe o sistema, as quais estão a uma distância ρ_i ($i = 1, \dots, n$) do ponto A , ou seja:

$${}_i\mathbf{H}_A = \sum_{i=1}^n [{}_i\rho_i \times (m_i \mathbf{v}_i)]$$

Imagine que as partículas em questão compõem um corpo rígido, o qual gira em torno do ponto A com uma velocidade angular ω . Posicionando-se um sistema móvel de referência no ponto A , o qual gira solidário ao corpo, também com uma velocidade angular ω

rência no ponto A , o qual gira solidário ao corpo, também com uma velocidade angular ω , e translada com uma velocidade ${}_I \mathbf{v}_A$, escreve-se que a velocidade linear absoluta de cada partícula que compõe o corpo rígido é:

$${}_I \mathbf{v}_i = {}_I \mathbf{v}_A + {}_I \omega \times {}_I \rho_i + \underbrace{{}_I \mathbf{v}_{B/i}}_{=0} \quad \text{pois, } {}_I \mathbf{v}_{B/i} = \mathbf{T}_B^T \underbrace{\frac{d}{} ({}_B \rho_i)}_{=0}$$

A quantidade de movimento angular do sistema, para o caso de rotação e translação simultâneas, fica sendo representada por:

$${}_I \mathbf{H}_A = \sum_{i=1}^n [{}_I \rho_i \times m_i ({}_I \mathbf{v}_A + {}_I \omega \times {}_I \rho_i)]$$

Expandindo os termos tem-se:

$${}_I \mathbf{H}_A = \sum_{i=1}^n [{}_I \rho_i \times m_i {}_I \mathbf{v}_A] + \sum_{i=1}^n [{}_I \rho_i \times m_i ({}_I \omega \times {}_I \rho_i)]$$

ou

$${}_I \mathbf{H}_A = \underbrace{\sum_{i=1}^n [{}_I \rho_i \times m_i]}_{\text{centro de massa}} \times {}_I \mathbf{v}_A + \sum_{i=1}^n [{}_I \rho_i \times m_i ({}_I \omega \times {}_I \rho_i)]$$

$${}_I \mathbf{H}_A = m {}_I \rho_A^* \times {}_I \mathbf{v}_A + \sum_{i=1}^n [{}_I \rho_i \times m_i ({}_I \omega \times {}_I \rho_i)]$$

Posicionando-se o sistema móvel de referência exatamente sobre o centro de massa do sistema de partículas (ou do corpo rígido), faz-se com que o vetor ${}_I \rho_A^*$ seja nulo. Em outras palavras, a distância entre o ponto onde o sistema móvel foi posicionado¹ e centro de massa do sistema torna-se nula, pois o ponto A coincide com o centro de massa do sistema:

$${}_I \mathbf{H}_A = \underbrace{m {}_I \rho_A^* \times {}_I \mathbf{v}_A}_{=0} + \sum_{i=1}^n [{}_I \rho_i \times m_i ({}_I \omega \times {}_I \rho_i)]$$

Logo, sendo A o centro de massa do sistema de partículas, tem-se que a quantidade de movimento angular do conjunto será dada por:

$${}_I \mathbf{H}_A = \sum_{i=1}^n {}_I \rho_i \times ({}_I \omega \times {}_I \rho_i) m_i$$

O vetor de quantidade de movimento angular pode ser representado tanto no sistema inercial I quanto no sistema móvel B ou Bn , obtida após n rotações consecutivas,

$${}_{Bn} \mathbf{H}_A = \sum_{i=1}^n {}_{Bn} \rho_i \times ({}_{Bn} \omega \times {}_{Bn} \rho_i) m_i$$

1. Este ponto também coincide com o ponto em torno do qual se deseja calcular a quantidade de movimento angular.

Descrevendo-se o vetor ρ , no sistema inercial ρ , e no sistema móvel ${}_B\rho$, de forma genérica, tem-se:

$${}_I\rho = {}_I\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \\ \bar{z}(t) \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad {}_B\rho = {}_B\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Observa-se, então, que ao descrever o vetor ρ , no sistema inercial, a sua representação depende do tempo. Já no sistema móvel, esta representação é constante e independente do tempo. Da mesma forma, descrevendo-se o vetor de velocidade angular ω na base inercial ω e na base móvel ${}_B\omega$ após n rotações consecutivas, de forma genérica, tem-se:

$${}_I\omega = \begin{Bmatrix} \bar{\omega}_x \\ \bar{\omega}_y \\ \bar{\omega}_z \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad {}_B\omega = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Muitos exemplos foram dados no capítulo anterior, em que esses vetores foram ora descritos no inercial, ora no sistema móvel.

Considerando-se um corpo rígido como um sistema de infinitas partículas de massa infinitesimal, trocam-se os símbolos de somatória pelo de integral e de m , por dm , e escreve-se o vetor de quantidade de movimento, representando-o no sistema inercial ou no sistema móvel:

$${}_I\mathbf{H}_A = \int {}_I\mathbf{r} \times ({}_I\omega \times {}_I\mathbf{r}) dm \quad (2.11)$$

$${}_B\mathbf{H}_A = \int {}_B\mathbf{r} \times ({}_B\omega \times {}_B\mathbf{r}) dm \quad (2.12)$$

Há duas possibilidades de prosseguir com os cálculos: na base móvel ou na base inercial. Aqui, faz-se a opção pelos cálculos na base móvel, solidária ao corpo, pois, nessa base ou sistema de referência, a representação do vetor ${}_B\mathbf{r}$ independe do tempo. Escrevendo-se um elemento infinitesimal de massa dm em função da densidade do material do qual o corpo é constituído e em função do volume infinitesimal $dV = dx dy dz$, tem-se:

$$dm = \mu dV = \mu dx dy dz \quad (2.13)$$

Com o auxílio das Equações 2.9, 2.10 e 2.13 substituem-se os valores de ${}_B\mathbf{r}$, ${}_B\omega$ e dm na equação da quantidade de movimento angular (2.12) e obtém-se:

$${}_B\mathbf{H}_A = \iiint \left(\begin{array}{c|ccc} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \\ \hline \mathbf{i}_x & \mathbf{j}_x & \mathbf{k}_x \\ x & y & z \end{array} \right) \mu dx dy dz$$

Efetuada-se mais uma vez o produto vetorial:

$${}_B\mathbf{H}_A = \iiint \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{j}_x & \mathbf{k}_x \\ x & y & z \\ (z\omega_y - y\omega_z) & -(z\omega_x - x\omega_z) & (y\omega_x - x\omega_y) \end{vmatrix} \mu dx dy dz$$

obtem-se o vetor de quantidade de movimento angular, sendo a representação do mesmo descrita com auxílio da base móvel Bu :

$${}_{B_u} \mathbf{H}_A = \iiint \begin{bmatrix} (y^2 \omega_x - xy \omega_y + z^2 \omega_x - xz \omega_z) \\ -(yx \omega_x - x^2 \omega_y - z^2 \omega_y + yz \omega_z) \\ (-zx \omega_x + x^2 \omega_z - zy \omega_y + y^2 \omega_z) \end{bmatrix} \mu \, dx \, dy \, dz$$

Reordenando os termos do vetor de quantidade de movimento angular, obtém-se:

$${}_{B_u} \mathbf{H}_A = \iiint \begin{bmatrix} (y^2 + z^2) & -xy & -xz \\ -yx & (x^2 + z^2) & -yz \\ -zx & -zy & (x^2 + y^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \mu \, dx \, dy \, dz$$

Mas as velocidades angulares $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ independem de x, y, z . Logo, colocando-se a integral para dentro da matriz, tem-se:

$${}_{B_u} \mathbf{H}_A = \begin{bmatrix} \iiint (y^2 + z^2) \mu \, dx \, dy \, dz & -\iiint xy \mu \, dx \, dy \, dz & -\iiint xz \mu \, dx \, dy \, dz \\ -\iiint yx \mu \, dx \, dy \, dz & \iiint (x^2 + z^2) \mu \, dx \, dy \, dz & -\iiint yz \mu \, dx \, dy \, dz \\ -\iiint zx \mu \, dx \, dy \, dz & -\iiint zy \mu \, dx \, dy \, dz & \iiint (x^2 + y^2) \mu \, dx \, dy \, dz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Efetuada-se a integral de cada termo da matriz, chega-se a:

$${}_{B_u} \mathbf{H}_A = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \Rightarrow {}_{B_u} \mathbf{H}_A = {}_{B_u} \mathbf{I}_A \, {}_{B_u} \boldsymbol{\omega}$$

em que

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= \iiint (y^2 + z^2) \mu \, dx \, dy \, dz \\ I_{yy} &= \iiint xy \mu \, dx \, dy \, dz \\ I_{zz} &= \iiint xz \mu \, dx \, dy \, dz \\ I_{yx} &= \iiint yx \mu \, dx \, dy \, dz \\ I_{yy} &= \iiint (x^2 + z^2) \mu \, dx \, dy \, dz \\ I_{yz} &= \iiint yz \mu \, dx \, dy \, dz \\ I_{zx} &= \iiint zx \mu \, dx \, dy \, dz \\ I_{zy} &= \iiint zy \mu \, dx \, dy \, dz \\ I_{zz} &= \iiint (x^2 + y^2) \mu \, dx \, dy \, dz \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Os termos I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} são chamados de **momentos de inércia de massa** em relação aos eixos do sistema móvel X_x , Y_y e Z_z , eixos posicionados com sua origem no ponto A (centro de massa do corpo). Os termos I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} são chamados de **produtos de inércia de massa** em relação aos eixos X_x , Y_y e Z_z . Ressalta-se que os termos I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} são iguais aos termos I_{yx} , I_{zy} e I_{xz} , respectivamente, transformando a matriz ${}_{Bn}\mathbf{I}_A$ em uma matriz simétrica. A matriz ${}_{Bn}\mathbf{I}_A$ é chamada de **tensor de inércia** em relação ao ponto A . O significado físico dessa matriz está relacionado com a distribuição das partículas que compõem o corpo, em relação aos eixos de referência adotado. Quanto maior for o valor dos momentos de inércia de massa I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} , maior será a distância das partículas em relação ao ponto de rotação A , ponto em torno do qual a quantidade de movimento angular foi calculada. Quando os produtos de inércia I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} forem diferentes de zero, isto significa que não existe simetria de distribuição de massa em relação aos eixos do sistema móvel de referência Bn adotado. Para os movimentos de translação pura, as informações sobre a massa total do corpo são suficientes para calcular a quantidade de movimento linear absoluta do corpo. No entanto, para calcular a quantidade de movimento angular absoluta do corpo precisa-se das informações sobre a distribuição da massa do corpo ao longo dos eixos de referência móvel Bn . Essa informação é obtida quando se resolvem as integrais dadas pela Equação 2.14. Estas integrais, quando resolvidas no sistema móvel Bn solidário ao corpo, tornam-se independentes do tempo e passam a depender somente da geometria do corpo. Estabelecendo-se os limites para as integrais, os quais dependem das dimensões do corpo, estas são resolvidas para obter a quantidade de movimento angular do corpo, representada na base móvel.

Assim, a representação da quantidade de movimento angular no sistema móvel Bn solidário ao corpo é mais conveniente, pois o tensor de inércia ${}_{Bn}\mathbf{I}_A$, quando descrito nesse referencial, permanece constante. É muito importante destacar que, no caso de o ponto A não coincidir com o centro de massa do corpo rígido, não se deve esquecer de adicionar o termo $m {}_{Bn}\rho_A^* \times {}_{Bn}\mathbf{v}_A$ no cálculo da quantidade de movimento angular. Ressalta-se mais uma vez que a velocidade ${}_{Bn}\mathbf{v}_A$ está relacionada à translação do ponto A , o qual não coincide com o centro de massa do conjunto e em torno do qual se realiza o cálculo da quantidade de movimento angular do corpo. Assim, de maneira geral, tem-se que a quantidade de movimento angular absoluta de um corpo em relação a um ponto A genérico é dada por:

$${}_{Bn}\mathbf{H}_A = {}_{Bn}\mathbf{I}_A {}_{Bn}\boldsymbol{\omega} + m {}_{Bn}\rho_A^* \times {}_{Bn}\mathbf{v}_A \quad (2.15)$$

- ${}_{Bn}\mathbf{I}_A$ é o tensor de inércia do corpo, calculado em relação ao ponto A e descrito em um sistema de referência móvel Bn solidário ao corpo.
- ${}_{Bn}\boldsymbol{\omega}$ é o vetor de velocidade angular absoluta do corpo, representado no sistema móvel Bn .
- m é a massa total do corpo.

- ${}_{B_0}\rho^A$ é o vetor com origem no ponto em torno do qual se calcula a quantidade de movimento angular (no caso A) e fim no centro de massa do corpo. Sua representação é feita na base móvel B_0 .
- ${}_{B_0}\mathbf{v}_A$ é a velocidade linear absoluta do ponto em torno do qual se calcula a quantidade de movimento angular absoluta do corpo. Sua representação é feita na base móvel B_0 .

2.3.4 Teorema dos Eixos Paralelos

Muitas vezes têm-se as informações sobre os momentos e produtos de inércia do corpo em relação a um determinado ponto, normalmente o centro de massa, e deseja-se obter os mesmos em relação a um outro ponto D qualquer, distante do centro de massa de D_x na direção X_c , D_y na direção Y_c e D_z na direção Z_c , distâncias estas medidas na base móvel. Utiliza-se, então, para o cálculo do Teorema dos Eixos Paralelos, ou Teorema de Steiner:

$$I_{xx} = I_{xc} + m(D_y^2 + D_z^2)$$

$$I_{yy} = I_{yc} + m(D_x^2 + D_z^2)$$

$$I_{zz} = I_{zc} + m(D_x^2 + D_y^2)$$

$$I_{xy} = I_{xyc} + m D_x D_y$$

$$I_{xz} = I_{xzc} + m D_x D_z$$

$$I_{yz} = I_{yzc} + m D_y D_z$$

Assim, o novo tensor de inércia calculado em relação ao ponto D será dado por:

$${}_{B_0}\mathbf{I}_D = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

2.3.5 Direções Principais de Inércia

Escolhendo-se um sistema móvel de referência solidário ao corpo que guarda simetria em relação à distribuição de massa do corpo, chega-se a tensores de inércia diagonais, ou seja, com os produtos de inércia de massa nulos:

$${}_{B_0}\mathbf{I}_D = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Quando isto acontece, diz-se que o sistema móvel escolhido coincide com os **três eixos principais de inércia do corpo**, contendo a maior, a menor e a inércia intermediária. Uma vez que o sistema de referência escolhido não coincide com os eixos principais de inércia e os produtos de inércia são diferentes de zero, é possível calcular essas direções principais

e os novos momentos de inércia de massa mudando-se de sistema de coordenadas. Para isto faz-se uso da teoria de Autovalores e Autovetores para o tensor de inércia. Calculando-se os autovalores do tensor de inércia através da equação

$$\begin{bmatrix} (I_{xx} - \lambda) & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & (I_{yy} - \lambda) & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & (I_{zz} - \lambda) \end{bmatrix} = 0$$

chega-se a uma equação polinomial de terceira ordem em λ :

$$C_3 \lambda^3 + C_2 \lambda^2 + C_1 \lambda + C_0 = 0$$

Resolvendo-se essa equação, ou seja, procurando-se os zeros da equação, chega-se a três valores de λ , os quais correspondem aos três momentos de inércia principais: λ_1 , o maior deles, λ_2 , o intermediário, e λ_3 , o menor deles. Desta forma, obtém-se um novo tensor de inércia, dado por:

$${}_{B_{\text{nov}}}\mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Essas inércias são descritas em uma nova base móvel solidária ao corpo, a base B_{nov} . Para poder passar da base móvel original B_0 para essa nova base móvel B_{nov} , também solidária ao corpo, mas que coincide com as direções principais de inércia, calculam-se os autovetores do tensor de inércia da seguinte forma:

- Cálculo da direção ${}_{B_0}\mathbf{s}_1$, direção do maior momento de inércia de massa, λ_1 . Resolvendo-se a equação

$$\begin{bmatrix} (I_{xx} - \lambda_1) & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & (I_{yy} - \lambda_1) & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & (I_{zz} - \lambda_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

obtém-se os valores a_1 , b_1 e c_1 diferentes da solução trivial. Para obter o vetor ${}_{B_0}\mathbf{s}_1$, contendo os cossenos diretores do vetor unitário (cursor), o qual fornecerá a informação da direção em torno da qual se tem a maior inércia de massa, basta dividir os valores achados pela norma $\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$:

$${}_{B_0}\mathbf{s}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \\ \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \\ \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \end{Bmatrix}$$

- Cálculo da direção ${}_{B_0}\mathbf{s}_2$, direção do momento de inércia de massa intermediário, λ_2 . Analogamente, resolvendo-se a equação

$$\begin{bmatrix} (I_{xx} - \lambda_2) & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & (I_{yy} - \lambda_2) & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & (I_{zz} - \lambda_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

chega-se aos valores de a_2 , b_2 e c_2 , e ao cursor unitário, o qual fornece a direção do eixo em torno do qual o momento de inércia intermediário ocorre:

$${}_{B_0}\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \\ \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \\ \frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \end{bmatrix}$$

- Cálculo da direção ${}_{B_0}\mathbf{s}_3$, direção do menor momento de inércia de massa, λ_3 . Análogo aos dois casos anteriores, escreve-se que:

$$\begin{bmatrix} (I_{xx} - \lambda_3) & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & (I_{yy} - \lambda_3) & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & (I_{zz} - \lambda_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}_{B_0}\mathbf{s}_3 = \begin{bmatrix} \frac{a_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}} \\ \frac{b_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}} \\ \frac{c_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}} \end{bmatrix}$$

De posse dos três autovetores ou dos três vetores unitários, os quais mostram as direções principais de inércia, ${}_{B_0}\mathbf{s}_1$, ${}_{B_0}\mathbf{s}_2$ e ${}_{B_0}\mathbf{s}_3$, pode-se determinar uma matriz de transformação de coordenadas \mathbf{T} entre as bases móveis B_0 e B_0+1 , na qual se têm as direções principais de inércia.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} & \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} & \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} \\ \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} & \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} & \frac{c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \\ \frac{a_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}} & \frac{b_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}} & \frac{c_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}} \end{bmatrix} \Rightarrow {}_{B_0+1}\mathbf{S} = \mathbf{T} {}_{B_0}\mathbf{S}$$

2.3.6 Variação da Quantidade de Movimento Angular

Fazendo analogia com a quantidade de movimento linear, a qual só pode variar com a presença de forças externas agindo sobre o corpo, escreve-se que a quantidade de movimento angular de um corpo rígido (ou seja, de um sistema de partículas representado pelo centro de massa, ${}_{B_0}\rho_A^*$ e pelo tensor de inércia ${}_{B_0}\mathbf{I}_A$) só poderá ser alterada mediante a aplicação de momentos externos sobre o mesmo. Derivando-se a equação da quantidade de movimento angular no sistema inercial, observa-se a necessidade de calcular a derivada do tensor de inércia, pois, o mesmo, quando descrito no sistema inercial, varia com o tempo. Mais prático é, portanto, derivar a equação da quantidade de movimento angular no sistema de referência solidário ao corpo B_0 , pois o tensor de inércia permanece independente do tempo. Porém, ao derivar um vetor no sistema móvel, perdem-se as informações relacionadas com a variação de sua direção, e para obter sua variação absoluta deve-se somar o produto do vetor de velocidade angular do sistema de referência ${}_{B_0}\boldsymbol{\Omega}$ pelo vetor a ser derivado, no caso, o vetor de quantidade de movimento angular ${}_{B_0}\mathbf{H}_A$. Assim:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n {}_{B_0}\mathbf{M}_A &= \frac{d}{dt}({}_{B_0}\mathbf{H}_A) + {}_{B_0}\boldsymbol{\Omega} \times {}_{B_0}\mathbf{H}_A = \\ &= \frac{d}{dt}({}_{B_0}\mathbf{I}_A {}_{B_0}\boldsymbol{\omega} + m {}_{B_0}\rho_A^* \times {}_{B_0}\mathbf{v}_A) + {}_{B_0}\boldsymbol{\Omega} \times ({}_{B_0}\mathbf{I}_A {}_{B_0}\boldsymbol{\omega} + m {}_{B_0}\rho_A^* \times {}_{B_0}\mathbf{v}_A) = \\ &= \underbrace{\frac{d}{dt}({}_{B_0}\mathbf{I}_A)}_{=0} {}_{B_0}\boldsymbol{\omega} + {}_{B_0}\mathbf{I}_A \frac{d}{dt}({}_{B_0}\boldsymbol{\omega}) + \underbrace{\frac{d}{dt}(m)}_{=0} {}_{B_0}\rho_A^* \times {}_{B_0}\mathbf{v}_A + m \underbrace{\frac{d}{dt}({}_{B_0}\rho_A^*)}_{=0} \times {}_{B_0}\mathbf{v}_A + \\ &+ m {}_{B_0}\rho_A^* \times \frac{d}{dt}({}_{B_0}\mathbf{v}_A) + {}_{B_0}\boldsymbol{\Omega} \times ({}_{B_0}\mathbf{I}_A {}_{B_0}\boldsymbol{\omega} + m {}_{B_0}\rho_A^* \times {}_{B_0}\mathbf{v}_A) = \\ &= {}_{B_0}\mathbf{I}_A \frac{d}{dt}({}_{B_0}\boldsymbol{\omega}) + {}_{B_0}\boldsymbol{\Omega} \times ({}_{B_0}\mathbf{I}_A {}_{B_0}\boldsymbol{\omega}) + m {}_{B_0}\rho_A^* \times \underbrace{\left(\frac{d}{dt}({}_{B_0}\mathbf{v}_A) + {}_{B_0}\boldsymbol{\Omega} \times {}_{B_0}\mathbf{v}_A \right)}_{\mathbf{a}_A} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n {}_{B_0}\mathbf{M}_A = {}_{B_0}\mathbf{I}_A \frac{d}{dt}({}_{B_0}\boldsymbol{\omega}) + {}_{B_0}\boldsymbol{\Omega} \times ({}_{B_0}\mathbf{I}_A {}_{B_0}\boldsymbol{\omega}) + m {}_{B_0}\rho_A^* \times \mathbf{a}_A \quad (2.16)$$

- $\sum_{i=1}^n {}_{B_0}\mathbf{M}_A$ é a somatória dos momentos provocados pelas n forças (externas e de reação) em relação ao ponto A , representadas no sistema solidário ao corpo.
- ${}_{B_0}\mathbf{I}_A$ é o tensor de inércia do corpo, calculado em relação ao ponto A (ponto em torno do qual se calcula a somatória de momentos). Este tensor é descrito em um sistema de referência móvel B_0 solidário ao corpo.
- $\frac{d}{dt}({}_{B_0}\boldsymbol{\omega})$ é a derivada do vetor de velocidade angular absoluta do corpo, quando este está representado no sistema móvel B_0 . Logo, se a velocidade angular absoluta do corpo ${}_{B_0}\boldsymbol{\omega}$ e da base B_0 , ${}_{B_0}\boldsymbol{\Omega}$, forem diferentes, este vetor não coincide com a aceleração angular absoluta do corpo.

- ${}_{Bn}\Omega$ é o vetor de velocidade angular absoluta da base Bn , representado no sistema móvel Bn .
- m é a massa total do corpo.
- ${}_{Bn}\rho_A^*$ é o vetor com origem no ponto em torno do qual se calcula a quantidade de movimento angular, no caso o ponto A , e fim no centro de massa do corpo. Sua representação é feita na base móvel Bn .
- ${}_{Bn}a_A$ é a aceleração linear absoluta do ponto em torno do qual se calcula a quantidade de movimento angular absoluta do corpo e, também, realiza-se a somatória de momentos. Sua representação é feita na base móvel Bn .

Ressalta-se aqui que o vetor de velocidade angular do sistema móvel de referência ${}_{Bn}\Omega$ coincide, na maioria dos casos, com o vetor de velocidade angular do corpo ${}_{Bn}\omega$. Há alguns casos em que isso não acontece, como no caso do movimento de um pião, mas, mesmo assim, o tensor de inércia permanece constante nesse referencial móvel, devido à simetria de distribuição de massa. Isto será ilustrado com maiores detalhes em exemplos ao longo deste capítulo. Diferenças básicas entre movimentos planos e espaciais serão detalhadas durante os exemplos teóricos abordados nas próximas seções deste texto.

2.4 Método Newton-Euler

O método Newton-Euler baseia-se fundamentalmente nas Equações 2.8 e 2.16. Os produtos finais do método são as equações diferenciais de movimento e as reações dinâmicas. A seguir apresentam-se as etapas do método, seguidas de alguns exemplos de aplicação.

CINEMÁTICA

1. Definição de sistemas de referência inercial I e móveis B_1, B_2, \dots, B_N , sendo os sistemas móveis sempre solidários aos corpos $1, 2, \dots, N$. Caso o sistema mecânico seja composto por N corpos, N sistemas móveis de referência são utilizados, ou seja, $X - Y - Z, X_1 - Y_1 - Z_1, X_2 - Y_2 - Z_2, \dots, X_N - Y_N - Z_N$ com seus respectivos versores $(i, j, k), (i_1, j_1, k_1), \dots, (i_N, j_N, k_N)$ e origens O, O_1, O_2, \dots, O_N .
2. Definição das matrizes de transformação de coordenadas dos sistemas móveis para o inercial T_i e vice-versa T_i^T , com $(i = 1, 2, \dots, N)$.
3. Cálculo das grandezas físicas como vetores de velocidade angular absoluta dos sistemas móveis de referência ${}_{Bn}\Omega$ e vetores de aceleração linear absoluta ${}_{Bn}\dot{\Omega}_i$, baseado nas relações geométricas dos movimentos executados pelos corpos, tanto no plano como no espaço, obedecendo a suas restrições físicas (equações de vínculo). Ressalta-se que esses vetores são convenientemente representados na própria base móvel B_i .
4. Determinação das equações de vínculo com base em uma equação vetorial fechada.
5. Cálculo das grandezas físicas como vetores de velocidade angular absoluta dos corpos ${}_{Bn}\omega$ e vetores de aceleração angular absoluta ${}_{Bn}\dot{\omega}$, com base nas relações

geométricas dos movimentos executados pelos corpos, tanto no plano como no espaço, obedecendo a suas restrições físicas (equações de vínculo). Ressalta-se que esses vetores são convenientemente representados na própria base móvel B_i .

6. Cálculo das grandezas físicas como vetores de velocidade linear absoluta do centro de massa dos corpos \mathbf{v}_i e vetores de aceleração linear absoluta do centro de massa dos corpos \mathbf{a}_i , com base nas relações geométricas dos movimentos executados pelos corpos, tanto no plano como no espaço, obedecendo a suas restrições físicas (equações de vínculo). Ressalta-se que esses vetores são representados na base inercial I , ${}_I\mathbf{v}_i$, ${}_I\mathbf{a}_i$ ou na base móvel B_i , ${}_{B_i}\mathbf{v}_i$, ${}_{B_i}\mathbf{a}_i$.

CINÉTICA OU DINÂMICA

7. Determinação das propriedades geométricas dos vários corpos que compõem o sistema mecânico, dentre elas a massa total de cada corpo m_i e o tensor de inércia I_{O_i} composto pelos momentos e produtos de inércia de massa.
8. Cálculo dos vetores de quantidade de movimento linear ${}_B\mathbf{J}_i$ do i -ésimo corpo em função da massa e da velocidade do centro de massa do corpo, $m_i \cdot {}_B\mathbf{v}_i$.
9. Cálculo do vetor de quantidade de movimento angular ${}_B\mathbf{H}_{O_i}$ do i -ésimo corpo baseado na velocidade angular ${}_B\boldsymbol{\omega}_i$ do corpo, e do tensor de inércia do corpo em relação ao ponto O escolhido.
10. Determinação de todas as forças de excitação (internas ou externas ao sistema) atuantes sobre o conjunto de corpos rígidos:

$$\sum_{j=1}^N {}_I\mathbf{F}_j$$

11. NEWTON (no sistema inercial I ou no B_N):

$$\sum_{j=1}^N {}_I\mathbf{F}_j = \frac{d}{dt}({}_I\mathbf{J}_i) = \frac{d}{dt}(m_i \cdot {}_I\mathbf{v}_i) = \underbrace{m_i \cdot {}_I\mathbf{v}_i}_{=0} + m_i \cdot {}_I\mathbf{a}_i = m_i \cdot {}_I\mathbf{a}_i \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

12. EULER (necessariamente no sistema móvel B_i):

$$\sum_{j=1}^N {}_{B_i}\mathbf{M}_{O_i} = \mathbf{I}_{O_i} \cdot \frac{d}{dt}({}_{B_i}\boldsymbol{\omega}) + {}_{B_i}\boldsymbol{\Omega}_i \times (\mathbf{I}_{O_i} \cdot {}_{B_i}\boldsymbol{\omega}) + m_i \cdot {}_{B_i}\mathbf{r}_{O_i} \times {}_{B_i}\mathbf{a}_{O_i}$$

13. Cálculo das equações diferenciais de movimento e das reações dinâmicas pelo Método Newton-Euler.
14. Resolução numérica das equações diferenciais de movimento e análise dos movimentos com grandes amplitudes do sistema de corpos rígidos.
15. Linearização das equações diferenciais de movimento para o sistema de corpos e obtenção das matrizes de massa, rigidez e amortecimento. Análise dos movimentos com pequenas amplitudes: análise de vibração, estabilidade, análise modal etc.

2.5 Fixando Conceitos Através de Exemplos

2.5.1 Calculando Momentos de Inércia de Corpo com Geometria Simples

Exemplo 1

Neste exemplo mostra-se como calcular, analiticamente, o momento de inércia de um cilindro circular sólido e homogêneo em relação a seu eixo principal \overline{OO} ou Z e em relação aos eixos X e Y . Este cálculo é baseado nas integrais definidas na Equação 2.14. A Figura 2.6 ilustra o cilindro circular, juntamente com o elemento infinitesimal de massa.

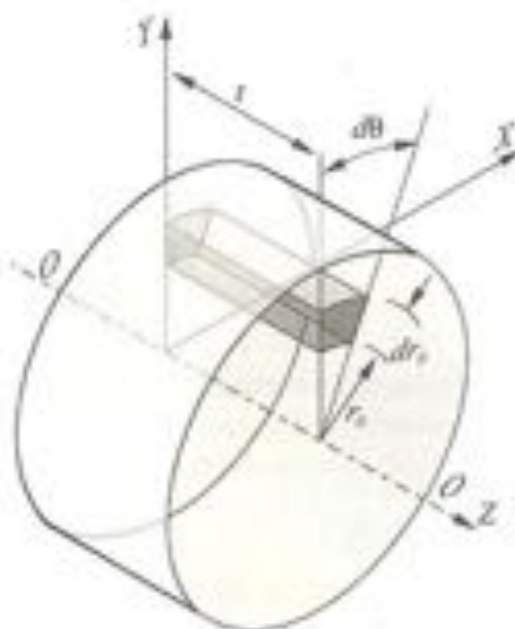


Figura 2.6
Cilindro circular homogêneo.

Resolução. Primeiramente calcula-se a inércia em relação ao eixo Z . Ressalta-se aqui que os eixos X, Y, Z são solidários ao cilindro. Fazendo-se uso das coordenadas polares, como mostrado na Figura 2.6, o raio r_0 pode ser escrito como $r_0^2 = x^2 + y^2$. O eixo Z é posicionado na direção do eixo principal do cilindro (\overline{OO}). Com o auxílio da Equação 2.14, escreve-se que:

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm = \int r_0^2 dm$$

O elemento diferencial de massa dm pode ser calculado como o produto do volume pela densidade ρ do material do qual o cilindro é constituído. O volume, por sua vez, pode ser expresso em função das coordenadas r_0, θ e t . Logo, tem-se

$$dm = \rho dV = \rho (r_0 d\theta dr_0 t)$$

Substituindo-se o elemento infinitesimal de massa dm na equação que descreve I_z , obtém-se uma integral dupla em dr_0 e $d\theta$. Os limites de integração são definidos pelo raio total do cilindro (r) e pelo fato de o cilindro ser circular sólido. Deste modo, tem-se a integral:

$$I_z = \int_0^r \int_0^{2\pi} r_0^3 t \rho \, d\theta \, dr_0 = t \rho \int_0^r \int_0^{2\pi} r_0^3 \, d\theta \, dr_0 = \frac{t \rho \pi r^4}{2}$$

Sabe-se que a densidade é uma relação entre a massa e o volume e, portanto, tem que ρ pode ser dado como:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi r^2 t}$$

Substituindo-se a expressão para a densidade, obtém-se o momento de inércia de massa em relação ao eixo Z:

$$I_z = \frac{m r^2}{2}$$

Agora, calcula-se o momento de inércia de massa em relação aos eixos X e Y, posicionados em uma das extremidades do cilindro. De acordo com a Equação 2.14, tem-se:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) \, dm$$

$$I_y = \int (x^2 + z^2) \, dm$$

Devido à simetria existente para o sólido de revolução, tem-se que I_x e I_y são iguais. Logo, calcula-se I_x e extrapola-se o resultado para I_y , como segue:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) \rho \cdot dV = \rho \int (y^2 + z^2) \, dV$$

Análogo ao cálculo do momento de inércia de massa em relação ao eixo Z, tem-se y e o elemento diferencial de volume dm descritos por:

$$y = r_0 \sin \theta$$

$$dV = r_0 \cdot d\theta \, dr_0 \, dz$$

Substituindo-se y e dV na equação de I_x e recordando-se algumas relações trigonométricas,² tem-se que:

$$\begin{aligned} I_x = I_y &= \rho \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^t (r_0^2 \sin^2 \theta + z^2) r_0 \cdot d\theta \, dr_0 \, dz = \\ &= \rho \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^t \left[r_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) + z^2 r_0 \right] d\theta \, dr_0 \, dz = \end{aligned}$$

2. $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$

$$\begin{aligned}
 &= \rho \int_0^t \int_0^r (\pi r_0^2 + 2 \pi r_0 z^2) dx_0 dz = \\
 &= \rho \int_0^t \left(\frac{1}{4} \pi r^4 + \pi z^2 r^2 \right) dz = \\
 &= \rho \pi \left(\frac{1}{4} r^4 t + \frac{1}{3} r^2 t^3 \right)
 \end{aligned}$$

Mas a densidade ρ pode ser escrita como:

$$\rho = \frac{m}{\pi r^2 t}$$

Logo, substituindo-a na expressão para I_{xx} chega-se a:

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{3} m t^2$$

Os valores calculados de I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} podem ser comparados aos valores tabelados de momentos de inércia para figuras geométricas simples, apresentados no Apêndice A deste texto.

Exemplo 2

Deseja-se, novamente, através deste exemplo, apresentar cálculo analítico dos momentos de inércia de massa de uma esfera sólida e homogênea de massa m e raio r . Fixa-se, então, o sistema de referência na própria esfera e ilustram-se as direções X , Y e Z na Figura 2.7.

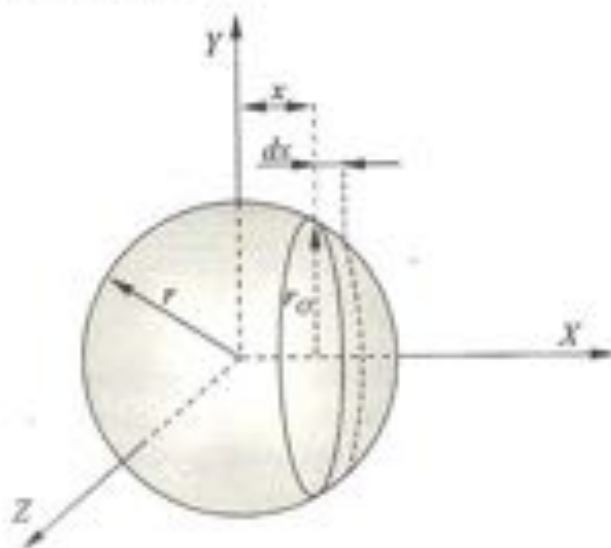


Figura 2.7
Esfera sólida homogênea.

Resolução. No caso particular de uma esfera, é fácil perceber que os momentos de inércia de massa nas três direções são idênticos, devido a sua simetria de distribuição de massa em todas as direções. Logo, calcula-se o momento de inércia de massa da esfera homogênea em apenas uma direção e extrapola-se o resultado para as outras direções, como segue:

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) \rho dV$$

Aqui, ρ é a densidade do material da esfera e dm , o elemento diferencial de volume dado por:

$$dV = \frac{\pi r_0^2}{2} dx \quad \Rightarrow \quad r_0 = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$dV = \frac{\pi(r^2 - x^2)}{2} dx$$

O raio r_0 é a distância do eixo X até a superfície da esfera de raio r . Pensando-se na equação da superfície da esfera, escreve-se que:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 + z^2 = r^2 - x^2$$

Logo, a integral a ser resolvida para obter o momento de inércia de massa da esfera é uma integral simples em função de dx , ou seja:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_{-r}^r (r^2 - x^2)^2 \frac{\pi}{2} \rho dx = \\ &= 2 \int_0^r (r^2 - x^2)^2 \frac{\pi}{2} \rho dx = \\ &= \rho \pi \int_0^r (r^4 - 2r^2 x^2 + x^4) dx = \\ &= \rho \pi \left[xr^4 - \frac{2r^2 x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^r = \rho \pi \left(\frac{8}{15} r^5 \right) \end{aligned}$$

Substituindo-se ρ , calculado a partir do volume da esfera,

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3} \pi r^3}$$

chega-se ao momento de inércia de massa para a esfera:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} mr^2$$

Estes valores podem ser comparados com os valores tabelados no Apêndice A.

2.5.2 Calculando Momentos de Inércia de Corpos com Geometria Complexa

Exemplo 1

O objetivo deste exemplo é ilustrar o cálculo de momento de inércia de massa de um corpo complexo em relação a um eixo preestabelecido *aa* (solidário ao corpo). Um corpo complexo pode, na maioria dos casos, ser recriado a partir de um conjunto de corpos mais simples, cujos momentos de inércia em relação a seus respectivos centros de massa são tabelados (vide Apêndice A). Estes momentos de inércia de massa (tabelados) foram, por sua vez, calculados com o auxílio das integrais definidas na Equação 2.14, utilizando-se a mesma metodologia mostrada nos exemplos anteriores. Ilustra-se, também, a aplicação do teorema dos eixos paralelos, utilizado para que o momento de inércia de cada um dos corpos seja transferido dos eixos que passam pelo centro de massa de cada um dos corpos para um eixo preestabelecido.

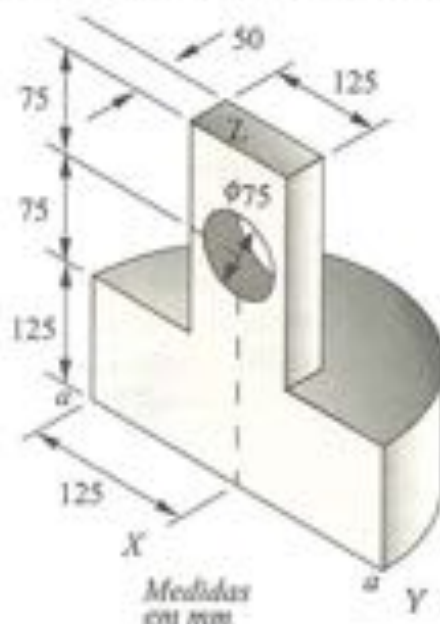


Figura 2.8
Corpo rígido com geometria complexa.

Resolução. No sólido da Figura 2.8 nota-se, claramente, que o mesmo é composto por três corpos de geometria simples: um paralelepípedo, um meio cilindro e um cilindro. Este último aparece como um furo no paralelepípedo.

Deseja-se calcular a inércia total do sólido em relação ao eixo *aa* mostrado na Figura 2.8. Primeiramente são calculados os momentos de inércia de massa de cada corpo em relação a seu respectivo centro de massa *e*, em seguida, com o auxílio do teorema dos Eixos Paralelos, transladam-se os mesmos para o eixo *aa* preestabelecido. Calculados os momentos de inércia de cada corpo em relação ao eixo *aa*, somam-se ou subtraem-se os mesmos para obter o momento de inércia (total) do

corpo complexo. É bom mencionar que, se o corpo simples for um furo, em outras palavras, não apresentar massa, seu momento de inércia será subtraído durante o cálculo do momento de inércia total.

- Considerando-se o cilindro (furo), o momento de inércia em relação ao eixo que passa por seu centro de massas e, além disso, é paralelo ao eixo oa (vide eixo y no Apêndice A) é dado por:

$$I_{\text{furo}} = I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{4}\rho Vr^2 + \frac{1}{12}\rho Vl^2 = \frac{1}{4}\rho\pi r^2l + \frac{1}{12}\rho\pi r^2l^3$$

Supondo-se que o corpo complexo seja de aço, cuja densidade é $\rho = 7,83 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$, tem-se:

$$I_{\text{furo}} = I_{yy} = \frac{1}{4} \cdot 7830 \cdot \pi \cdot (0,0375)^2 \cdot (0,050) + \frac{1}{12} \cdot 7830 \cdot \pi \cdot (0,0375)^2 \cdot (0,050)^3 =$$

$$I_{\text{furo}} = I_{yy} = 0,00097 \text{ [Kg} \cdot \text{m}^2\text{]}$$

- Considerando-se o paralelepípedo, obtém-se, com o auxílio das tabelas apresentadas no Apêndice A, o momento de inércia em relação ao eixo y . Este eixo passa pelo centro de massa do paralelepípedo e é paralelo ao eixo oa . Desta forma, escreve-se que:

$$I_{\text{paral}} = I_{yy} = \frac{1}{12}m(b^2 + l^2) = \frac{1}{12}\rho(a \cdot b \cdot l)(b^2 + l^2)$$

$$I_{\text{paral}} = \frac{1}{12} \cdot 7830(0,125 \cdot 0,050 \cdot 0,150) \cdot (0,050^2 + 0,150^2) = 0,01530 \text{ [Kg} \cdot \text{m}^2\text{]}$$

- Considerando-se o meio cilindro sólido e utilizando-se as tabelas do Apêndice A, tem-se que o momento de inércia deste em relação ao eixo y (vide Apêndice A) paralelo ao eixo oa é:

$$I_{\text{meio}} = I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{4}\rho \frac{\pi r^2l}{2} + \frac{1}{12}\rho \frac{\pi r^2l^3}{2}$$

$$I_{\text{meio}} = \frac{1}{4} \cdot 7830 \cdot \frac{\pi(0,125)^2(0,125)}{2} + \frac{1}{12} \cdot 7830 \cdot \frac{\pi(0,125)^2(0,125)^3}{2} = 0,12512 \text{ [Kg} \cdot \text{m}^2\text{]}$$

- Transladando-se as três inércias (do furo, do paralelepípedo e do meio cilindro) para o eixo oa com o auxílio do teorema dos eixos paralelos e, em seguida, somando-as, tem-se a inércia total do corpo:

$$I_{\text{tot}} = -\left[I_{\text{furo}} + m(D_{x_{\text{furo}}}^2 + D_{z_{\text{furo}}}^2) \right] + \left[I_{\text{paral}} + m(D_{x_{\text{paral}}}^2 + D_{z_{\text{paral}}}^2) \right] + \\ + \left[I_{\text{meio}} + m(D_{x_{\text{meio}}}^2 + D_{z_{\text{meio}}}^2) \right]$$

Menciona-se aqui, mais uma vez, que o sinal negativo para a inércia do furo se relaciona com o fato de o furo não ter massa. Continuando os cálculos, segue que:

$$I_{ax} = - \left[I_{furo} + \rho \cdot V_{furo} (D_{x,furo}^2 + D_{z,furo}^2) \right] + \left[I_{paraf} + \rho \cdot V_{paraf} (D_{x,paraf}^2 + D_{z,paraf}^2) \right] + \\ + \left[I_{q2,af} + \rho \cdot V_{q2,af} \left(\frac{D_{q2,af}^2}{\frac{4r}{3\pi}} + D_{z,q2,af}^2 \right) \right]$$

Substituindo-se os valores $D_{x,paraf}$, $D_{z,paraf}$, $D_{x,q2,af}$, $D_{z,q2,af}$, $D_{x,furo}$ e $D_{z,furo}$ os quais descrevem as distâncias entre o centro de massa de cada um dos corpos e o eixo ao preestabelecido, e que podem ser obtidos através do desenho mostrado neste exemplo, tem-se:

$$I_{ax} = - \left(0,00097 + 7830 \cdot \pi \cdot 0,0375^2 \cdot 0,050 (0,025^2 + 0,2^2) \right) + \\ + \left(0,01530 + 7830 \cdot 0,150 \cdot 0,125 \cdot 0,050 (0,025^2 + 0,2^2) \right) + \\ + \left(0,12512 + 7830 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 0,125^2 \cdot 0,125 \left(\left(\frac{4 \cdot 0,125}{3 \cdot \pi} \right)^2 + 0,0625^2 \right) \right) \\ I_{ax} = 0,6133 \text{ [Kg} \cdot \text{m}^2]$$

2.5.3 Calculando o Tensor de Inércia de Corpos com Geometria Complexa via Programa Computacional em Linguagem MATLAB

Exemplo 4

Este exemplo tem três objetivos fundamentais: (a) ilustrar como calcular o tensor de inércia de um corpo complexo em relação ao eixo solidário ao corpo que passa por seu centro de massa; (b) elaborar um programa computacional, escrito em linguagem MATLAB, para calcular as propriedades geométricas e de massa de corpos sólidos homogêneos, quando estes puderem ser recriados a partir de corpos de geometrias mais simples; (c) obter as direções principais de inércia de um corpo complexo através do cálculo dos autovalores e autovetores do tensor de inércia. As dimensões da peça são dadas a seguir:

$a = 100 \text{ mm}$	$e = 300 \text{ mm}$	$r = 30 \text{ mm}$
$b = 120 \text{ mm}$	$f = 50 \text{ mm}$	$\rho = 8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
$c = 150 \text{ mm}$	$g = 60 \text{ mm}$	

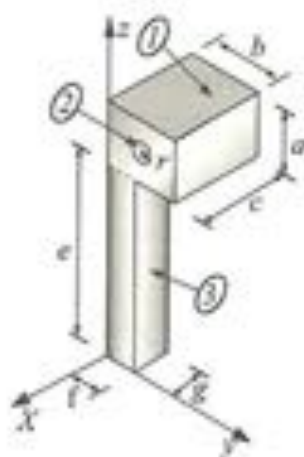


Figura 2.9
Corpo rígido com geometria complexa.

Resolução. Observa-se que a peça mostrada na Figura 2.9 é composta por três sólidos de geometria simples: **corpo 1** – paralelepípedo; **corpo 2** – cilindro (furo passante); e **corpo 3** – paralelepípedo.

(a) A primeira etapa para chegar ao tensor de inércia em relação ao centro de massa da peça é o cálculo do centro de massa.

□ Cálculo das coordenadas do centro de massa de cada um dos sólidos que formarão a peça e de suas respectivas massas:

Corpo	Coordenada x	Coordenada y	Coordenada z	Massa
1	$x_1 = -\frac{c}{2}$	$y_1 = \frac{b}{2}$	$z_1 = e + \frac{a}{2}$	$m_1 = \rho V_1 = \rho abc$
2	$x_2 = -\frac{c}{2}$	$y_2 = \frac{b}{2}$	$z_2 = e + \frac{a}{2}$	$m_2 = \rho V_2 = \rho \pi r^2 c$
3	$x_3 = -\frac{f}{2}$	$y_3 = \frac{g}{2}$	$z_3 = \frac{e}{2}$	$m_3 = \rho V_3 = \rho f g h$

□ Cálculo de centro de massa da peça em função da massa e do centro de massa de cada um dos sólidos que irão formar a peça:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i x_i}{\sum_{i=1}^3 m_i} = \frac{\rho abc \left(-\frac{c}{2}\right) - \rho \pi r^2 c \left(-\frac{c}{2}\right) + \rho f g h \left(-\frac{f}{2}\right)}{\rho abc - \rho \pi r^2 c + \rho f g h}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i y_i}{\sum_{i=1}^3 m_i} = \frac{\rho abc \left(\frac{b}{2}\right) - \rho \pi r^2 c \left(\frac{b}{2}\right) + \rho f g h \left(\frac{f}{2}\right)}{\rho abc - \rho \pi r^2 c + \rho f g h}$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i z_i}{\sum_{i=1}^3 m_i} = \frac{\rho abc \left(\frac{a}{2} + e\right) - \rho \pi r^2 c \left(\frac{a}{2} + e\right) + \rho f g h \left(\frac{e}{2}\right)}{\rho abc - \rho \pi r^2 c + \rho f g h}$$

7. Cálculo dos momentos de inércia e produtos de inércia de cada um dos corpos em relação a seus respectivos centros de massa (vide Apêndice A):

□ *Corpo 1*

$$I_{x_1} = \frac{1}{12} m_1 (a^2 + b^2)$$

$$I_{y_1} = \frac{1}{12} m_1 (a^2 + c^2)$$

$$I_{z_1} = \frac{1}{12} m_1 (b^2 + c^2)$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{y_1 x_1} = 0$$

$$I_{x_1 z_1} = I_{z_1 x_1} = 0$$

$$I_{y_1 z_1} = I_{z_1 y_1} = 0$$

□ *Corpo 2*

$$I_{x_2} = \frac{1}{2} m_2 r^2$$

$$I_{y_2} = \frac{1}{4} m_2 r^2 + \frac{1}{12} m_2 c^2$$

$$I_{z_2} = \frac{1}{4} m_2 r^2 + \frac{1}{12} m_2 c^2$$

$$I_{x_2 y_2} = I_{y_2 x_2} = 0$$

$$I_{x_2 z_2} = I_{z_2 x_2} = 0$$

$$I_{y_2 z_2} = I_{z_2 y_2} = 0$$

□ *Corpo 3*

$$I_{x_3} = \frac{1}{12} m_3 (e^2 + f^2)$$

$$I_{y_3} = \frac{1}{12} m_3 (e^2 + g^2)$$

$$I_{z_3} = \frac{1}{12} m_3 (f^2 + g^2)$$

$$I_{x_3 y_3} = I_{y_3 x_3} = 0$$

$$I_{x_3 z_3} = I_{z_3 x_3} = 0$$

$$I_{y_3 z_3} = I_{z_3 y_3} = 0$$

- *Cálculo dos momentos e produtos de inércia de cada um dos sólidos em relação ao centro de massa do conjunto (peça), utilizando-se o Teorema dos Eixos Paralelos:*

□ *Corpo 1*

$$\overline{I_{x_1}} = I_{x_1} + m_1(d_{x_1}^2 + d_{y_1}^2)$$

$$\overline{I_{y_1}} = I_{y_1} + m_1(d_{x_1}^2 + d_{z_1}^2)$$

$$\overline{I_{z_1}} = I_{z_1} + m_1(d_{x_1}^2 + d_{y_1}^2)$$

$$\overline{I_{x_1 y_1}} = I_{x_1 y_1} + m_1 d_{x_1} d_{y_1}$$

$$\overline{I_{x_1 z_1}} = I_{x_1 z_1} + m_1 d_{x_1} d_{z_1}$$

$$\overline{I_{y_1 z_1}} = I_{y_1 z_1} + m_1 d_{y_1} d_{z_1}$$

$$\text{em que } \begin{Bmatrix} d_{x_1} \\ d_{y_1} \\ d_{z_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -\frac{c}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{a}{2} + e \end{Bmatrix}$$

□ *Corpo 2*

$$\overline{I_{x_2}} = I_{x_2} + m_2(d_{x_2}^2 + d_{y_2}^2)$$

$$\overline{I_{y_2}} = I_{y_2} + m_2(d_{x_2}^2 + d_{z_2}^2)$$

$$\overline{I_{z_2}} = I_{z_2} + m_2(d_{x_2}^2 + d_{y_2}^2)$$

$$\overline{I_{x_2 y_2}} = I_{x_2 y_2} + m_2 d_{x_2} d_{y_2}$$

$$\overline{I_{x_2 z_2}} = I_{x_2 z_2} + m_2 d_{x_2} d_{z_2}$$

$$\overline{I_{y_2 z_2}} = I_{y_2 z_2} + m_2 d_{y_2} d_{z_2}$$

$$\text{em que } \begin{Bmatrix} d_{x_2} \\ d_{y_2} \\ d_{z_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -\frac{c}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{a}{2} + e \end{Bmatrix}$$

□ *Corpo 3*

$$\overline{I_{x_3}} = I_{x_3} + m_3(d_{x_3}^2 + d_{y_3}^2)$$

$$\overline{I_{y_3}} = I_{y_3} + m_3(d_{x_3}^2 + d_{z_3}^2)$$

$$\overline{I_{z_3}} = I_{z_3} + m_3(d_{x_3}^2 + d_{y_3}^2)$$

$$\overline{I_{x_3 y_3}} = I_{x_3 y_3} + m_3 d_{x_3} d_{y_3}$$

$$\overline{I_{x_3 z_3}} = I_{x_3 z_3} + m_3 d_{x_3} d_{z_3}$$

$$\overline{I_{y_3 z_3}} = I_{y_3 z_3} + m_3 d_{y_3} d_{z_3}$$

$$\text{em que } \begin{Bmatrix} d_{x_3} \\ d_{y_3} \\ d_{z_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -\frac{c}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{a}{2} \end{Bmatrix}$$

- *Cálculo dos momentos e produtos de inércia da peça em relação a seu centro de massa, somando-se os momentos e produtos de inércias dos sólidos geradores da mesma:*

$$\overline{I_{xx}} = \overline{I_{xx_1}} - \overline{I_{xx_2}} + \overline{I_{xx_3}}$$

$$\overline{I_{yy}} = \overline{I_{yy_1}} - \overline{I_{yy_2}} + \overline{I_{yy_3}}$$

$$\overline{I_{zz}} = \overline{I_{zz_1}} - \overline{I_{zz_2}} + \overline{I_{zz_3}}$$

$$\overline{I_{xy}} = \overline{I_{xy_1}} - \overline{I_{xy_2}} + \overline{I_{xy_3}}$$

$$\overline{I_{xz}} = \overline{I_{xz_1}} - \overline{I_{xz_2}} + \overline{I_{xz_3}}$$

$$\overline{I_{yz}} = \overline{I_{yz_1}} - \overline{I_{yz_2}} + \overline{I_{yz_3}}$$

- (a) *Tem-se, assim, os elementos que compõem o tensor de inércia $[I_{CM}]$ da peça, calculado em relação ao centro de massa da mesma:*
- (b) *Programa computacional escrito em ambiente MATLAB para a determinação das propriedades geométricas e de massa de corpos rígidos homogêneos:*

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% PROGRAMA MOMINER                                                    %
% responsável pelo cálculo do tensor de inércia, das inércias e direções %
% principais de objetos sólidos, recitado a partir de objetos de geometria %
% simples.                                                            %
% DANIEL CARMONA DE CAMPOS RA 950384, bolsista de IC.                 %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

NumObj=input('Forneca o numero de objetos: ');

fprintf(' Agora para cada objeto deve-se fornecer os seguintes dados:\n')
fprintf(' a. Negativo ou positivo " n')
fprintf(' b. O tipo de objeto dentre as seguintes opções:"n');
fprintf(' Paralelepípedo, Cilindro, Cone, Tubo e Esfera"n');
fprintf(' c. As dimensões de cada objeto e seu posicionamento no espaço"n');
fprintf(' d. As coordenadas de seu centro de massa em relação ao referencial"n');
fprintf(' e. A massa ou a densidade do objeto"n')
fprintf('Tecla qualquer tecla para continuar"n');
pause;
fprintf("\n");
fprintf("\n");
fprintf("\n");
fprintf("\n");

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% inicio da entrada de dados de cada objeto %%%%%%%%%%%
k=zeros(2,NumObj);
parale=zeros(3,NumObj);
cilind=zeros(3,NumObj);
tubo=zeros(4,NumObj);
esfera=zeros(1,NumObj);
cone=zeros(3,NumObj);
cm=zeros(3,NumObj);
m=zeros(1,NumObj);
gama=zeros(1,NumObj);
Volume=zeros(1,NumObj);
for i=1:NumObj,

```

```

fprintf('***** Dados do Objeto numero: ***** "n ');
i
%%%%%%%%%%Objeto negativo ou positivo%%%%%%%%%%
k(1,i)=menu('O objeto e', 'positivo', 'negativo' );
fprintf('');
fprintf('');
k(2,i)=menu('O objeto e': 'Paralelepipedo', 'Cilindro', 'Tubo', 'Esfera', 'Cone');
%%%%%%%%%%Dimensoes de cada objeto%%%%%%%%%%
if k(2,i)==1,
    fprintf('');
    parale(1,i)=input('Forneca o comprimento na direcao X: ');
    fprintf('');
    parale(2,i)=input('Forneca o comprimento na direcao Y : ');
    fprintf('');
    parale(3,i)=input('Forneca o comprimento na direcao Z: ');
elseif k(2,i)==2,
    fprintf('');
    cilind(1,i)=input('Forneca o Raio do cilindro: ');
    fprintf('');
    cilind(2,i)=input('Forneca a Altura do cilindro: ');
    fprintf('');
    cilind(3,i)=menu('Direcao do eixo do cilindro: ', 'Direcao X', 'Direcao Y', 'Direcao Z');
elseif k(2,i)==3,
    fprintf('');
    tubo(1,i)=input('Forneca o Raio Interno do tubo: ');
    fprintf('');
    tubo(2,i)=input('Forneca o Raio Externo do tubo: ');
    if tubo(2,i)<tubo(1,i),
        fprintf('Atencao: Raio externo menor que o Raio interno');
        fprintf('');
        tubo(1,i)=input('Forneca o RAIIO INTERNO do tubo: ');
        fprintf('');
        tubo(2,i)=input('Forneca o RAIIO EXTERNO do tubo: ');
    end
    fprintf('');
    tubo(3,i)=input('Forneca a altura do tubo: ');
    fprintf('');
    tubo(4,i)=menu('Direcao do eixo do tubo: ', 'Direcao X', 'Direcao Y', 'Direcao Z');
elseif k(2,i)==4,
    fprintf('');
    esfera(1,i)=input('Forneca o Raio da esfera: ');
else
    cone(1,i)=input('Forneca o Raio da base do cone: ');
    fprintf('');
    cone(2,i)=input('Forneca a Altura do cone: ');

    fprintf('');
    cone(3,i)=menu('Direcao do eixo do cone: ', 'Direcao X', 'Direcao Y', 'Direcao Z');
end
fprintf('');
fprintf('');
fprintf('');
%%%%%%%%%%Posicao do centro de massa%%%%%%%%%%
fprintf('A coordenada do centro de massa do objeto e:\n');
cm(1,i)=input('Coordenada X: ');
%fprintf(dan, '%f "n", cm(1,i));

```



```

cm(2,i)=input('Coordenada Y : ');
fprintf(4,'%f \n',cm(2,i));
cm(3,i)=input('Coordenada Z: ');
fprintf(4,'%f \n',cm(3,i));
fprintf("\n");
fprintf("\n");
%%%%%%%%Massa ou densidade do objeto%%%%%%%%%%%%%%
fprintf('Dados de massa: Caso o objeto seja negativo, forneça "n");
fprintf('densidade do proprio material a ser "n');
fprintf('subtraido "n');
fprintf("\n");
fprintf("\n");
md(1,i)=menu('Deseja fornecer:', 'massa', 'densidade' );
if md(1,i)==1,
m(1,i)=input('Valor da massa: ');
else
gamma(1,i)=input('Valor da densidade: ');
end
%%%%%%%%Calculo da massa caso seja fornecida a densidade%%%%%%%%%%
% Volume
if k(2,i)==1,
Volume(1,i)= parale(1,i)*parale(2,i)*parale(3,i);
elseif k(2,i)==2,
Volume(1,i)= pi*(cilind(1,i) ^ 2*cilind(2,i));
elseif k(2,i)==3,
Volume(1,i)= pi*tubo(3,i)*(tubo(2,i) ^ 2-tubo(1,i) ^ 2);
elseif k(2,i)==4,
Volume(1,i)= 4/3*pi*esfera(1,i) ^ 3;
else
Volume(1,i)=(1/3)*pi*cone(1,i) ^ 2*cone(2,i);
end
if md(1,i)==2,
m(1,i)=Volume(1,i)*gamma(1,i);
end
%Verificacao se o objeto e negativo ou positivo
if k(1,i)==2,
m(1,i)=-m(1,i);
end
fprintf("\n");
fprintf("\n");
end
%%%%%%%%%%%% Final da entrada de dados %%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%% Verificacao dos dados %%%%%%%%%%%%%%%
fprintf('***** Agora verifique seus dados *****');
fprintf("\n");
fprintf("\n");
for i=1:NumObj,
fprintf('*****Para o objeto de Numero: "n');
|
if k(1,i)==1,
fprintf('a. Positivo "n');
else
fprintf('a. Negativo "n');
end

```

```

fprintf("\n");
fprintf("\n");
fprintf('Tecla qualquer tecla para continuar ');
fprintf("\n");fprintf("\n");
pause;
if k(2,i)==1,
fprintf('b. Paralelepipedo ');
fprintf('Comprimento na direcao X: ');
parale(1,i)
fprintf('Comprimento na direcao Y : ');
parale(2,i)
fprintf('Comprimento na direcao Z: ');
parale(3,i)
elseif k(2,i)==2,
fprintf('b. Cilindro ');
fprintf('Raio: ');
cilind(1,i)
fprintf('Altura: ');
cilind(2,i)
fprintf('Direcao do eixo: ');
if cilind(3,i)==1,
fprintf('Eixo na direcao X');
elseif cilind(3,i)==2,
fprintf('Eixo na direcao Y');
else
fprintf('Eixo na direcao Z');
end
elseif k(2,i)==3,
fprintf('b. Tubo ');
fprintf('Raio interno: ');
tubo(1,i)

fprintf('Raio externo: ');
tubo(2,i)
fprintf('Altura: ');
tubo(3,i)
if tubo(4,i)==1,
fprintf('Eixo na direcao X');
elseif tubo(4,i)==2,
fprintf('Eixo na direcao Y');
else
fprintf('Eixo na direcao Z');
end
elseif k(2,i)==4,
fprintf(' b. Esfera ');
fprintf('Raio da esfera:');
esfera(1,i)
else
fprintf(' b. Cone ');
fprintf(' Raio da base do cone: ');
cone(1,i)
fprintf(' Altura do cone: ');
cone(2,i)
end
fprintf("\n");fprintf("\n");

```

```

fprintf('Tecla qualquer tecla para continuar \n');
fprintf('\n');
fprintf('\n');
pause;
fprintf(' d. Centro de massa:\n');
fprintf('Direcao X: \n');
cm(1,i)
fprintf('Direcao Y : \n');
cm(2,i)
fprintf('Direcao Z: \n');
cm(3,i)
fprintf('\n');fprintf('\n');
fprintf('Tecla qualquer tecla para continuar \n');
fprintf('\n');
fprintf('\n');
pause;
fprintf('e. Massa ou densidade:\n');
if md(1,i)==1,
fprintf('A massa e:\n');
abs(m(1,i))
else
fprintf('A densidade e:\n');
gama(1,i)
end
fprintf('\n');
fprintf('\n');
%%% %%%Para cada objeto, caso haja necessidade de haver alteracao, novamente sera
pergunta do, todos %%% os dados deste objeto
r=menu('Deseja alterar algum dado deste corpo?', 'Sim', 'No');
if r==1,
fprintf('*****Alterando dados do objeto: ***** \n');
|
fprintf(' Tecla qualquer tecla para continuar \n');
pause;
k(1,i)=menu('O objeto e', 'positivo', 'negativo' );

fprintf('\n');
fprintf('\n');
k(2,i)=menu('O objeto e', 'Paralelepipedo', 'Cilindro', 'Tubo', 'Esfera', 'Cone');
%%% %%%Dimensao do objeto%%%
if k(2,i)==1,
fprintf(' \n');
parale(1,i)=input('Forneca o comprimento na direcao X: ');
fprintf('\n');
parale(2,i)=input('Forneca o comprimento na direcao Y : ');
fprintf('\n');
parale(3,i)=input('Forneca o comprimento na direcao Z: ');
elseif k(2,i)==2,
fprintf('\n');
cilind(1,i)=input('Forneca o Raio do cilindro: ');
fprintf('\n');
cilind(2,i)=input('Forneca a Altura do cilindro: ');
fprintf('\n');
cilind(3,i)=menu('Direcao do eixo do cilindro: ', 'Direcao X', 'Direcao Y', 'Direcao Z');
elseif k(2,i)==3,

```

```

fprintf("\n");
tubo(1,i)=input('Forneca o Raio Interno do tubo: ');
fprintf("\n");
tubo(2,i)=input('Forneca o Raio Externo do tubo: ');
if tubo(2,i)<tubo(1,i),
fprintf('Atencao: Raio externo menor que o Raio interno');
fprintf("\n");
tubo(1,i)=input('Forneca o RAIO INTERNO do tubo: ');
fprintf("\n");
tubo(2,i)=input('Forneca o RAIO EXTERNO do tubo: ');
end
fprintf("\n");
tubo(3,i)=input('Forneca a Altura do tubo: ');
fprintf("\n");
tubo(4,i)=menu('Direcao do eixo do tubo: ','Direcao X','Direcao Y','Direcao Z');
elseif k(2,i)=-4,
fprintf("\n");
esfera(1,i)=input('Forneca o Raio da esfera: ');
else

cone(1,i)=input('Forneca o Raio da base do cone:');
fprintf("\n");
cone(2,i)=input('Forneca a Altura do cone: ');
fprintf("\n");
cone(3,i)=menu('Direcao do eixo do cone: ','Direcao X','Direcao Y','Direcao Z');
end
fprintf("\n");
fprintf("\n");
fprintf("\n");
%%%%%%%%%Posicao do centro de massa%%%%%%%%%
fprintf('A coordenada do centro de massa do objeto e:\n');
cm(1,i)=input('Coordenada X: ');
%fprintf(4,'%f \n',cm(1,i));
cm(2,i)=input('Coordenada Y : ');
%fprintf(4,'%f \n',cm(2,i));
cm(3,i)=input('Coordenada Z: ');
%fprintf(4,'%f \n',cm(3,i));
fprintf("\n");
fprintf("\n");
%%%%%%%%%Massa ou densidade do objeto%%%%%%%%%
fprintf('Dados de massa: Caso o objeto seja negativo, forneca \n');
fprintf('densidade do proprio material a ser \n');
fprintf('subtraido \n');
fprintf("\n");
fprintf("\n");
md(1,i)=menu('Deseja fornecer: ','massa','densidade' );
if md(1,i)==1,
m(1,i)=input('Valor da massa: ');
else
gamma(1,i)=input('Valor da densidade: ');
end
%%%%%%%%%Calculo da massa caso seja fornecida a densidade%%%%%%%%%
% Volume
if k(2,i)=-1,
Volume(1,i)= parale(1,i)*parale(2,i)*parale(3,i);

```



```

elseif k(2,i)=2,
Volume(1,i)= pi*(cilind(1,i) ^ 2*cilind(2,i);
elseif k(2,i)=3,
Volume(1,i)= pi*tubo(3,i)*(tubo(2,i) ^ 2-tubo(1,i) ^ 2);
elseif k(2,i)=4,
Volume(1,i)= 4/3*pi*esfera(1,i) ^ 3;
else
Volume(1,i)=(1/3)*pi*cone(1,i) ^ 2*cone(2,i);
end
if md(1,i)=-2,
m(1,i)=Volume(1,i)*gama(1,i);
end
%Verificacao se o objeto e negativo ou positivo
if k(1,i)=-2,
m(1,i)=-m(1,i);
end
fprintf("\n");
fprintf("\n");
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
fprintf("\n");fprintf("\n");
fprintf('Tecla qualquer tecla para continuar : "\n');
fprintf("\n");
fprintf("\n");
pause;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Final da Verificacao dos dados %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Calculo do centro de massa %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
a=0;b=0;c=0;w=0;
for i=1:NumObj,
a=m(i)*cm(1,i)+a;
b=m(i)*cm(2,i)+b;
c=m(i)*cm(3,i)+c;
end
fprintf("\n");
fprintf(' Temos agora o centro de massa do conjunto de objetos estudados "\n');
X=a/sum(m);
fprintf('Centro de massa (Direcao X): "\n')
X
Y=b/sum(m);
fprintf('Centro de massa (Direcao Y): "\n')
Y
Z=c/sum(m);
fprintf('Centro de massa (Direcao Z): "\n')
Z
fprintf('Tecla qualquer tecla para continuar : "\n');
pause;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Final dos calculos do Centro de massa do conjunto %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calculo dos momentos de Inercia em relacao ao proprio eixo %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i=1:NumObj,
if k(2,i)=1,
I(1,i)=(1/12)*m(1,i)*(parale(2,i) ^ 2+parale(3,i) ^ 2);
I(2,i)=(1/12)*m(1,i)*(parale(1,i) ^ 2+parale(3,i) ^ 2);
I(3,i)=(1/12)*m(1,i)*(parale(1,i) ^ 2+parale(2,i) ^ 2);
elseif k(2,i)=2,

```


(c) Aplicando o programa computacional para a determinação do tensor de inércia, das inércias principais e de suas respectivas direções:

□ Corpo 1

a. Positivo

b. Paralelepípedo

c. Comprimento na direção X: 0,15 m

Comprimento na direção Y: 0,12 m

Comprimento na direção Z: 0,10 m

d. Centro de massa: $x_1 = -0,075$ m

$y_1 = 0,060$ m

$z_1 = 0,350$ m

e. $\rho = 8 \times 10^3$ kg/m³

□ Corpo 2

a. Negativo

b. Cilindro

c. Raio igual a 0,03 m, altura de 0,15 m e eixo na direção X

d. Centro de massa: $x_2 = -0,075$ m

$y_2 = 0,060$ m

$z_2 = 0,350$ m

e. $\rho = 8 \times 10^3$ kg/m³

□ Corpo 3

a. Positivo

b. Paralelepípedo

c. Comprimento na direção X: 0,06 m

Comprimento na direção Y: 0,05 m

Comprimento na direção Z: 0,30 m

d. Centro de massa: $x_3 = -0,030$ m

$y_3 = 0,025$ m

$z_3 = 0,150$ m

e. $\rho = 8 \times 10^3$ kg/m³

Seguindo-se o programa MOMSTA, conferem-se os dados de entrada e, então, o programa apresenta o centro de massa do conjunto, momentos de inércia e produtos de inércia (tensor de inércia), respectivos autovalores e autovetores em relação ao eixo de coordenadas escolhido. Observa-se que as letras entre aspas são as respectivas variáveis no programa. Após terminar de rodar o mesmo, basta digitar a variável e pressionar Enter para obter o valor (ou valores) associado(s) a ela.

- Centro de Massa do Conjunto ("X", "Y" e "Z"):

$$\bar{X} = -0,0572 \text{ m}$$

$$\bar{Y} = 0,0462 \text{ m}$$

$$\bar{Z} = 0,2709 \text{ m}$$

- Momentos de Inércia ("I_{xx}", "I_{yy}" e "I_{zz}"):

$$I_{xx} = 0,2627 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{yy} = 0,2710 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{zz} = 0,0550 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

- Produtos de Inércia ("I_{xy}", "I_{xz}" e "I_{yz}"):

$$I_{xy} = -0,0069 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{yz} = -0,0392 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{xz} = 0,0305 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

- Matrizes de Autovalores ("D") e Autovetores ("V")

$$\begin{bmatrix} 0,2755 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2696 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0435 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= 0,2755 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \\ \lambda_2 &= 0,2696 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \\ \lambda_3 &= 0,0435 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0,2378 & 0,9548 & -0,1784 \\ 0,9670 & -0,2155 & 0,1359 \\ -0,0913 & 0,2049 & 0,9745 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$${}_B \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0,2378 \\ 0,9670 \\ -0,0913 \end{bmatrix} \quad {}_B \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0,9548 \\ -0,2155 \\ 0,2049 \end{bmatrix} \quad {}_B \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -0,1784 \\ 0,1359 \\ 0,9745 \end{bmatrix}$$

Resalta-se aqui que os autovalores λ_i do tensor de inércia estão relacionados com as inércias principais do corpo: a maior ($\lambda_1 = 0,2755 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$), a menor ($\lambda_3 = 0,0435 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$) e a intermediária ($\lambda_2 = 0,2696 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$). Estas inércias, ou distribuição de massa em torno de eixos de referências, estão associadas a eixos, os quais são paralelos aos autovetores ${}_B \mathbf{u}_i$, os quais passam pelo centro de massa do corpo, uma vez que este foi calculado em relação ao centro de massa do conjunto.

O vetor ${}_B \mathbf{u}_1$, representado sempre na base B solulária ao corpo, oferece como informação fundamental a direção do eixo onde se encontra a maior distribuição de massa, ou seja, o maior momento de inércia de massa, cujo valor é $\lambda_1 = 0,2755 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. O vetor ${}_B \mathbf{u}_3$ informa a direção do menor momento de inércia do corpo, cujo valor é

$\lambda_3 = 0,0435 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Já o vetor ${}_G\mathbf{u}_3$ informa a direção intermediária de inércia, cuja distribuição de massa ao redor desse eixo vale $\lambda_2 = 0,2696 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Os dados anteriores são todos os dados impressos na tela do computador quando se termina de rodar o programa MOMINER. No entanto, muitas vezes outros dados do conjunto são necessários.

Neste programa, as colunas das matrizes estão associadas a um objeto sólido. Assim, a seguir têm-se outras variáveis úteis a serem utilizadas ou apenas verificadas:

- Massa de cada um dos objetos ("m"):

Corpo	1	2	3
Massa	14,4000	-3,3929	7,2000

- Volume de cada um dos objetos ("Volume"):

Corpo	1	2	3
Volume	0,0018	0,0004	0,0009

- Densidade de cada um dos objetos ("gamma"):

Corpo	1	2	3
Densidade	8000	8000	8000

- Coordenadas do centro de massa de cada um dos objetos ("cm"):

Corpo	1	2	3
X	-0,075	-0,075	-0,030
Y	-0,060	-0,060	0,025
Z	0,350	0,350	0,150

- Momentos de inércia de cada objeto, ainda sem transferir para o centro de massa do conjunto ("I"):

Corpo	1	2	3
I_{G_1}	0,0293	-0,0015	0,0555
I_{G_2}	0,3900	-0,0071	0,0562
I_{G_3}	0,0443	-0,0071	0,0037

- 7) *Momentos de inércia de cada objeto transferidos para o centro de massa do conjunto ("I_{tr}"):*

Corpo	1	2	3
I_{x_x}	0,1221	-0,0234	0,1640
I_{y_y}	0,1336	-0,0294	0,1667
I_{z_z}	0,0516	-0,0088	0,0122

- 8) *Produtos de inércia de cada objeto transferidos para o centro de massa do conjunto ("I_{tr}"):*

Corpo	1	2	3
I_{x_y}	-0,0035	0,0008	-0,0041
I_{x_z}	-0,0203	0,0048	-0,0237
I_{y_z}	0,0158	-0,0037	0,0184

- 9) *Tensor de inércia do conjunto em relação ao centro de massa do mesmo ("Z"):*

$$[I_{CM}] = \begin{bmatrix} I_{x_x} & -I_{x_y} & -I_{x_z} \\ -I_{y_x} & I_{y_y} & -I_{y_z} \\ -I_{z_x} & -I_{z_y} & I_{z_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2627 & 0,0069 & 0,0392 \\ 0,0069 & 0,2710 & -0,0305 \\ 0,0392 & -0,0305 & 0,0550 \end{bmatrix}$$

2.6 Sistema de Múltiplos Corpos no Plano (Equações de Movimento + Reações Dinâmicas)

Exemplo 5

O objetivo fundamental deste exemplo é demonstrar o procedimento de cálculo das forças de reação variantes no tempo e das equações de movimento de um mecanismo biela-manivela acoplado a um pêndulo simples. Um efeito interessante de visualizar é o funcionamento estável do pêndulo em uma posição invertida ($\psi = 180^\circ$), quando a rotação do sistema biela-manivela atinge um determinado valor. Neste exemplo, calculam-se as forças nos pontos de contato entre as várias componentes do mecanismo e a equação diferencial de segunda ordem não linear de movimento para o pêndulo simples. Essa equação é solucionada numericamente, e os resultados são apresentados na forma gráfica. Esses resultados são verificados experimentalmente e mostrados no CD-ROM, com o auxílio de um protótipo (construído e) mostrado na Figura 2.10. Antes de prosseguir com a leitura do Exemplo 5, sugere-se ao leitor que releia brevemente o item 2.4 para que as etapas do método Newton-Euler

fiquem claras e bem definidas. Isto facilitará o entendimento da metodologia de resolução apresentada a seguir.

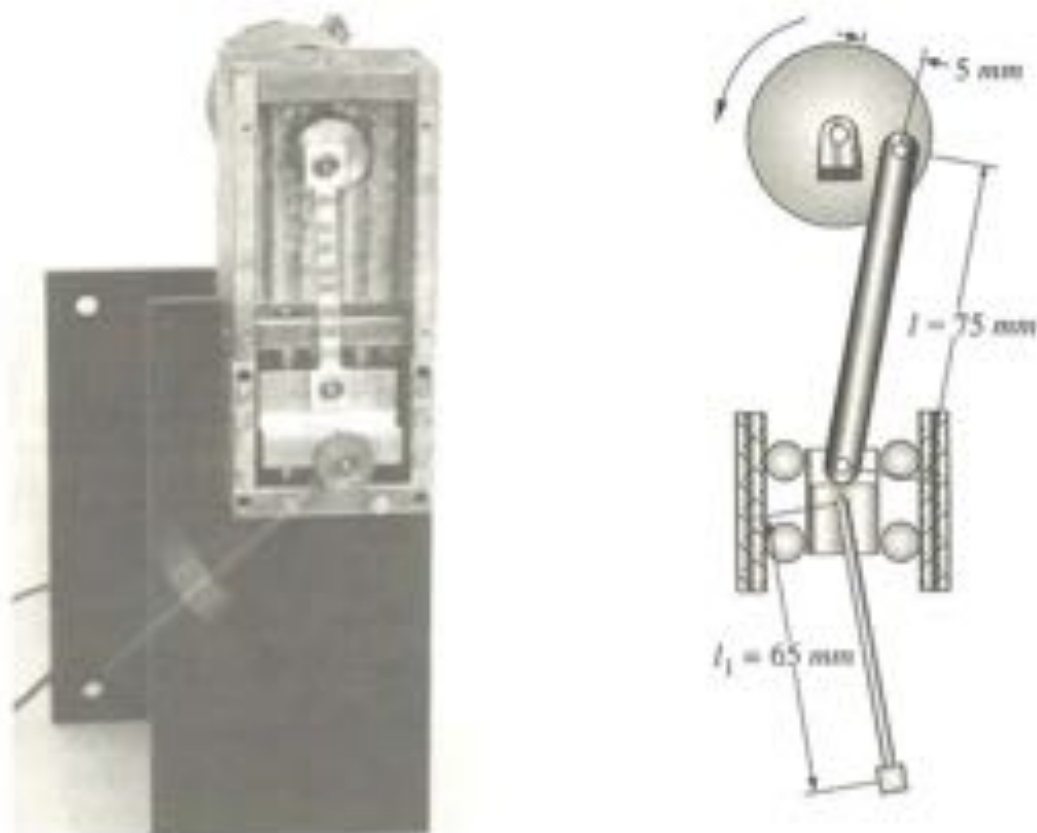


Figura 2.10
Bicla-manivéla-pêndulo. Sistema físico e modelo mecânico com as respectivas dimensões.

Resolução. *Ilustra-se a seguir o Método Newton-Euler.*

CINEMÁTICA

1. *Sistemas de referência: para a solução do problema, utiliza-se um sistema de referência móvel por corpo, além do sistema inercial, obviamente.*
 - *I: Sistema inercial com eixos X, Y, Z representados pelos cursores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ e com origem no centro do disco.*
 - *B1: Sistema móvel com eixos X_1, Y_1, Z_1 solidário ao corpo 1 (disco) e representado pelos cursores $\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1$. A origem deste sistema encontra-se no centro do disco.*
 - *B2: Sistema móvel com eixos X_2, Y_2, Z_2 solidário ao corpo 2 (braço) e representado pelos cursores $\hat{i}_2, \hat{j}_2, \hat{k}_2$. A origem deste sistema encontra-se no ponto B (Figura 2.11).*

- *B3: Sistema móvel com eixos X_p, Y_p, Z , solidário ao corpo 4 (pêndulo) e representado pelos cursores $\mathbf{i}_p, \mathbf{j}_p, \mathbf{k}_p$. A origem deste sistema encontra-se no ponto B (Figura 2.11).*
- *Nenhuma base móvel é utilizada no corpo 3, pois este apresenta somente movimentos de translação, os quais são facilmente representados na base inercial.*

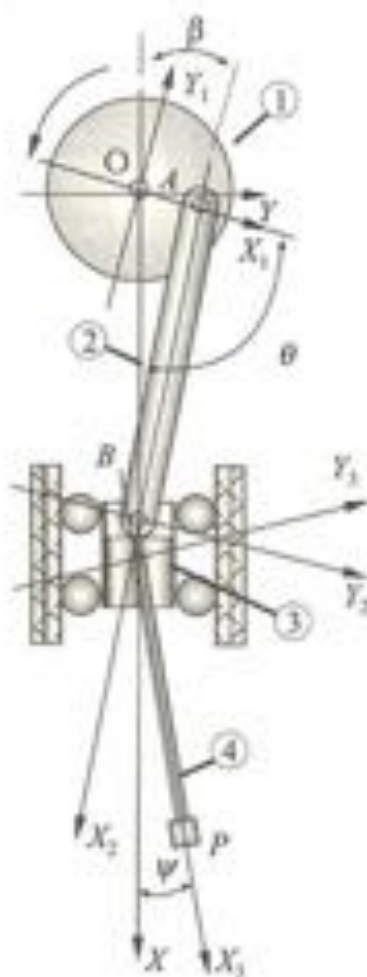


Figura 2.11
Sistemas de referência (inercial e móveis) utilizados para descrever o comportamento do sistema de múltiplos corpos no plano.

2. *Matrizes de transformação de coordenadas: uma vez definidos os sistemas de referência, é necessário que se consiga sempre passar de um para o outro sem dificuldades. Isto é feito com o auxílio das matrizes de transformação de coordenadas. A matriz de transformação de coordenadas do sistema inercial para a base móvel B1, a qual gira positivamente em torno do eixo Z e é solidária ao disco, é:*

$$T_0 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{em que} \quad {}_{01}\mathbf{s} = T_0 {}_1\mathbf{s}$$

Isto significa que, quando θ estiver na posição mostrada na Figura 2.11, terá valores positivos.

A matriz de transformação de coordenadas do sistema inercial para a base móvel B2, a qual gira negativamente em torno do eixo Z e é solidária ao braço AB, é:

$$\mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{em que} \quad {}_{B2}\mathbf{s} = \mathbf{T}_\beta {}_1\mathbf{s}$$

Isto significa que, quando β estiver na posição mostrada na Figura 2.11, terá valores positivos.

A matriz de transformação de coordenadas do sistema inercial para a base móvel B3, a qual gira positivamente em torno do eixo Z e é solidária à massa do pêndulo (corpo 3), é:

$$\mathbf{T}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{em que} \quad {}_{B3}\mathbf{s} = \mathbf{T}_\psi {}_1\mathbf{s}$$

Isto significa que, quando ψ estiver na posição mostrada na Figura 2.11, terá valores positivos.

Quando se trabalha com mecanismos ou sistemas de corpos rígidos com vínculos cinemáticos, muitas vezes os ângulos das matrizes de transformação de coordenadas podem ser descritos em função do ângulo de acionamento, utilizando, para isto, as relações geométricas do mecanismo. Assim, após a definição das matrizes de transformação de coordenadas, faz-se necessário calcular a relação existente entre os ângulos θ (ângulo motor) e β (ângulo movido), uma vez que o ângulo ψ é um ângulo independente de θ , ou seja, consegue-se alterá-lo sem que, necessariamente, os ângulos θ e β sejam modificados.



Figura 2.12
Relações geométricas entre os ângulos de acionamento e o ângulo do braço acionado.

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{h}{r} \quad \Rightarrow \quad h = r \sin \theta \\ \sin \beta &= \frac{h}{l} = \frac{r \sin \theta}{l} \\ \beta &= \arcsin \left(\frac{r \sin \theta}{l} \right) \end{aligned} \tag{2.17}$$

3. Velocidades e acelerações dos sistemas móveis de referência:

A velocidade e a aceleração angulares do corpo 1 (disco) são conhecidas e dadas por:

$$\text{Base B1: } {}_1\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad {}_1\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ pois } \dot{\theta} \text{ é constante}$$

A velocidade e a aceleração angulares do corpo 2 (braço) são desconhecidas, mas sabe-se que, se o movimento se passa no plano XY, estas rotações acontecem necessariamente no eixo Z. Logo, a velocidade angular e sua derivada podem ser escritas vetorialmente como

$$\text{Base B2: } {}_1\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\beta} \end{bmatrix}, \quad {}_1\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ddot{\beta} \end{bmatrix}$$

sendo as grandezas $\dot{\beta}$ e $\ddot{\beta}$ incógnitas do problema, até o momento. Há duas maneiras de resolver o problema em questão. A primeira delas seria derivando diretamente a expressão dada na Equação 2.17 para obter expressões analíticas para $\dot{\beta}$ e $\ddot{\beta}$, uma vez que β é descrito analiticamente pela respectiva equação. Uma outra maneira de solucionar o problema seria utilizando os conceitos de velocidade e aceleração em bases móveis, cuja descrição é apresentada no Item 5 a seguir.

4. Grandezas escritas de forma vetorial:

$$\begin{aligned} {}_{s1}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow {}_1\mathbf{r} = \mathbf{T}_\theta^T \cdot {}_{s1}\mathbf{r} \Rightarrow {}_1\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}_{s2}\mathbf{l} = \begin{bmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow {}_1\mathbf{l} = \mathbf{T}_\beta^T \cdot {}_{s2}\mathbf{l} \Rightarrow {}_1\mathbf{l} = \begin{bmatrix} -l \cos \beta \\ l \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}_{s3}\mathbf{l}_1 = \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow {}_1\mathbf{l}_1 = \mathbf{T}_\psi^T \cdot {}_{s3}\mathbf{l}_1 \Rightarrow {}_1\mathbf{l}_1 = \begin{bmatrix} l_1 \cos \psi \\ l_1 \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. Determinação das velocidades e acelerações:

Com o auxílio do sistema móvel B1 solidário ao disco, pode-se escrever que a velocidade absoluta do ponto A fixo no disco é:

$${}_1\mathbf{v}_A = \underbrace{{}_1\mathbf{v}_O}_{=0} + {}_1\omega_1 \times {}_1\mathbf{r}_{OA} + \underbrace{{}_1\mathbf{v}_{B/OA}}_{=0} = {}_1\omega_1 \times {}_1\mathbf{r}_{OA} \quad (2.18)$$

Uma vez que se trata do movimento de um ponto de um corpo rígido (ponto A) descrito em um sistema de referência solidário ao corpo 1 e posicionado sobre o ponto O, tem-se que ${}^1\mathbf{v}_{B0A} = 0$. Além disso, a velocidade do ponto O é nula, ou seja: ${}^1\mathbf{v}_O = 0$.

Com o auxílio do sistema móvel B2 solidário ao braço, pode-se escrever que a velocidade absoluta do ponto A fixo também no braço é:

$${}^1\mathbf{v}_A = {}^1\mathbf{v}_B + {}^1\omega_2 \times {}^1\mathbf{l} + {}^1\mathbf{v}_{B0A} = {}^1\mathbf{v}_B + {}^1\omega_2 \times {}^1\mathbf{l} \quad (2.19)$$

pois ${}^1\mathbf{v}_{B0B} = 0$ (sistema móvel B2 fixo ao corpo e os dois pontos A e B também).

Como o braço e o disco estão acoplados através do ponto A, a velocidade do ponto A tanto para o disco como para o braço é igual. Logo, pode-se escrever a seguinte igualdade entre as Equações 2.18 e 2.19

$${}^1\omega_1 \times {}^1\mathbf{r}_{OA} = {}^1\mathbf{v}_B + {}^1\omega_2 \times {}^1\mathbf{l}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ r \cos \theta & r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\dot{\beta} \\ -l \cos \beta & l \sin \beta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -r\dot{\theta} \sin \theta \\ r\dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l\dot{\beta} \sin \beta \\ l\dot{\beta} \cos \beta \\ 0 \end{vmatrix}$$

Observa-se que v_B tem componente somente na direção X (vertical), devido à restrição do movimento na direção Y (horizontal) (Figura 2.11).

Reescrevendo de forma matricial e evidenciando as variáveis v_B e $\dot{\beta}$, as quais devem ser calculadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & l \sin \beta \\ 0 & l \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_B \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\dot{\theta} \sin \theta \\ r\dot{\theta} \cos \theta \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema matricial, tem-se:

$$v_B = \frac{\begin{vmatrix} -r\dot{\theta} \sin \theta & l \sin \beta \\ r\dot{\theta} \cos \theta & l \cos \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & l \sin \beta \\ 0 & l \cos \beta \end{vmatrix}} = \frac{-r\dot{\theta} \sin(\theta + \beta)}{\cos \beta}$$

e

$$\dot{\beta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -r\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & r\dot{\theta} \cos \theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & l \sin \beta \\ 0 & l \cos \beta \end{vmatrix}} = \frac{r\dot{\theta} \cos \theta}{l \cos \beta}$$

Cálculo das acelerações: Com o auxílio do sistema móvel de referência B1 solidário ao disco, pode-se escrever a seguinte equação para a aceleração do ponto A:

$${}_1\mathbf{a}_A = \underbrace{{}_1\mathbf{a}_O}_{=0} + \underbrace{{}_1\dot{\omega}_1 \times}_0 \underbrace{{}_1\dot{\omega}_1 \times}_0 \underbrace{{}_1\mathbf{r}}_0 + 2 \cdot \underbrace{{}_1\dot{\omega}_1 \times}_0 \underbrace{{}_1\mathbf{v}_{A/O}}_{=0} + \underbrace{{}_1\mathbf{a}_{A/O}}_{=0} \quad (\text{disco})$$

Com o auxílio do sistema móvel de referência B2 solidário ao braço, pode-se escrever a seguinte equação para a aceleração do ponto A:

$${}_1\mathbf{a}_A = {}_1\mathbf{a}_B + \underbrace{{}_1\dot{\omega}_2 \times}_0 \underbrace{{}_1\dot{\omega}_2 \times}_0 \underbrace{{}_1\mathbf{l}}_0 + 2 \cdot \underbrace{{}_1\dot{\omega}_2 \times}_0 \underbrace{{}_1\mathbf{v}_{A/B}}_{=0} + \underbrace{{}_1\mathbf{a}_{A/B}}_{=0} \quad (\text{braço})$$

Uma vez que o ponto A conecta o disco e o braço, pode-se afirmar que, para o mecanismo realmente funcionar, tanto a aceleração do ponto A calculada com o auxílio da base móvel B1 quanto a da base móvel B2 precisam necessariamente ser iguais, ou seja:

$$\Rightarrow \underbrace{{}_1\dot{\omega}_1 \times}_0 \underbrace{{}_1\dot{\omega}_1 \times}_0 \underbrace{{}_1\mathbf{r}}_0 = \underbrace{{}_1\mathbf{a}_B}_0 + \underbrace{{}_1\dot{\omega}_2 \times}_0 \underbrace{{}_1\dot{\omega}_2 \times}_0 \underbrace{{}_1\mathbf{l}}_0 + \underbrace{{}_1\dot{\omega}_2 \times}_0 \underbrace{{}_1\mathbf{l}}_0$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ r \cos \theta & r \sin \theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\beta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\dot{\beta} \\ -l \cos \beta & l \sin \beta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\dot{\beta} \\ -l \cos \beta & l \sin \beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ -r \dot{\theta} \sin \theta & r \dot{\theta} \cos \theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\dot{\beta} \\ l \dot{\beta} \sin \beta & l \dot{\beta} \cos \beta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l \ddot{\beta} \sin \beta \\ l \ddot{\beta} \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -r \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ -r \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l \dot{\beta}^2 \cos \beta \\ -l \dot{\beta}^2 \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l \ddot{\beta} \sin \beta \\ l \ddot{\beta} \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observa-se, mais uma vez, que \mathbf{a}_B tem componente somente na direção vertical X, característica do mecanismo em questão.

Reescrevendo a equação de forma matricial e evidenciando os termos a serem calculados (a_B e $\ddot{\beta}$), chega-se a:

$$\begin{bmatrix} 1 & l \sin \beta \\ 0 & l \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_B \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \dot{\theta}^2 \cos \theta - l \dot{\beta}^2 \cos \beta \\ -r \dot{\theta}^2 \sin \theta + l \dot{\beta}^2 \sin \beta \end{bmatrix}$$

Resolvendo-se o sistema matricial 2×2 chega-se aos valores de a_B e $\ddot{\beta}$:

$$a_B = \frac{\begin{vmatrix} (-r\dot{\theta}^2 \cos \theta - l\dot{\beta}^2 \cos \beta) & l \sin \beta \\ (-r\dot{\theta}^2 \sin \theta + l\dot{\beta}^2 \sin \beta) & l \cos \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & l \sin \beta \\ 0 & l \cos \beta \end{vmatrix}} = \frac{-r\dot{\theta}^2 \cos(\theta + \beta) - l\dot{\beta}^2}{\cos \beta} \quad (2.20)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & (-r\dot{\theta}^2 \cos \theta - l\dot{\beta}^2 \cos \beta) \\ 0 & (-r\dot{\theta}^2 \sin \theta + l\dot{\beta}^2 \sin \beta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & l \sin \beta \\ 0 & l \cos \beta \end{vmatrix}} = \frac{-r\dot{\theta}^2 \sin \theta - l\dot{\beta}^2 \sin \beta}{l \cos \beta}$$

Os movimentos realizados pelo ponto B são os mesmos realizados pelo corpo 3, translação pura. Uma vez que o sistema móvel B3 tem sua origem fixa nesse corpo, mas gira solidariamente com o pêndulo simples, escreve-se que a aceleração da massa do pêndulo é:

$${}_1\mathbf{a}_P = {}_1\mathbf{a}_B + \dot{\psi} \times {}_1\dot{\psi} \times {}_1\mathbf{l}_1 + \ddot{\psi} \times {}_1\mathbf{l}_1 + 2\dot{\psi} \times \mathbf{v}_{Brel} + \mathbf{a}_{Brel}$$

$${}_1\mathbf{a}_P = \begin{Bmatrix} a_B \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\psi} \\ l_1 \cos \psi & l_1 \sin \psi & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \ddot{\psi} \\ l_1 \cos \psi & l_1 \sin \psi & 0 \end{vmatrix}$$

$${}_1\mathbf{a}_P = \begin{Bmatrix} a_B \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\psi} \\ -\dot{\psi} l_1 \sin \psi & \dot{\psi} l_1 \cos \psi & 0 \end{vmatrix} + \begin{Bmatrix} -\ddot{\psi} l_1 \sin \psi \\ \ddot{\psi} l_1 \cos \psi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Assim, chega-se à expressão analítica para a aceleração da massa do pêndulo simples em função dos parâmetros do mecanismo, aceleração esta descrita no sistema de referência inercial:

$${}_1\mathbf{a}_P = \begin{Bmatrix} a_B \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\dot{\psi}^2 l_1 \cos \psi \\ -\dot{\psi}^2 l_1 \sin \psi \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\ddot{\psi} l_1 \sin \psi \\ \ddot{\psi} l_1 \cos \psi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_1\mathbf{a}_P = \begin{Bmatrix} a_B - \dot{\psi}^2 l_1 \cos \psi - \ddot{\psi} l_1 \sin \psi \\ -\dot{\psi}^2 l_1 \sin \psi + \ddot{\psi} l_1 \cos \psi \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Descrevendo-se a aceleração do pêndulo no sistema de referência móvel $B3$, tem-se:

$${}_{B3}\mathbf{a}_P = \mathbf{T}_\psi \cdot {}_1\mathbf{a}_P = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_B - \dot{\psi}^2 l_1 \cos\psi - \ddot{\psi} l_1 \sin\psi \\ -\dot{\psi}^2 l_1 \sin\psi + \ddot{\psi} l_1 \cos\psi \\ 0 \end{bmatrix}$$

que simplificada resulta em:

$${}_{B3}\mathbf{a}_P = \mathbf{T}_\psi \cdot {}_1\mathbf{a}_P = \begin{bmatrix} a_B \cos\psi - l_1 \dot{\psi}^2 \\ -a_B \sin\psi + l_1 \ddot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde a_B foi calculado na página anterior, Equação 2.20.

DINÂMICA

A Figura 2.13 ilustra o diagrama de corpo livre dos vários componentes do mecanismo. Têm-se 4 corpos distintos, em que 2 são modelados como corpo rígido e 2 como partícula. Para cada corpo rígido no plano, têm-se 3 equações de equilíbrio dinâmico, 2 de força e 1 de momento. Para uma partícula no plano, têm-se duas equações de equilíbrio dinâmico, sendo ambas de força. Uma vez que se têm 2 corpos rígidos e 2 partículas no plano, chega-se a um total de $2 \times 3 + 2 \times 2 = 10$ equações à disposição para o cálculo das reações nos pontos de contato entre os vários corpos. Analisando-se o número de forças não conhecidas no problema, contam-se 9 incógnitas, a saber: $M_T, F_{12}, F_{12}, F_{22}, F_{22}, F_{32}, F_{32}, N_e T$. Observa-se, então, a sobre de uma equação. Esta equação livre está relacionada com a equação de movimento do pêndulo simples, montado na extremidade da manivela. Isto é característico no método Newton-Euler, no qual se obtêm, simultaneamente, as reações e as equações de movimento dos componentes. Começando-se a análise pelo equilíbrio dinâmico do pêndulo simples, tem-se:

- Corpo 4 (pêndulo) – forças atuando sobre a massa m_4 do pêndulo:

$${}_1\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} m_4 g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_{B3}\mathbf{P}_4 = \mathbf{T}_\psi \cdot {}_1\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} m_4 g \cos\psi \\ -m_4 g \sin\psi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-({}_{B3}\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{reação}$$

- ▮ Aplicando-se a segunda lei de Newton com os vetores representados na base móvel $B3$:

$$\sum_{i=1}^n {}_{B3}\mathbf{F}_i = m_4 {}_{B3}\mathbf{a}_P \Rightarrow \begin{bmatrix} m_4 g \cos\psi \\ -m_4 g \sin\psi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = m_4 \begin{bmatrix} -a_B \cos\psi - l_1 \dot{\psi}^2 \\ a_B \sin\psi + l_1 \ddot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

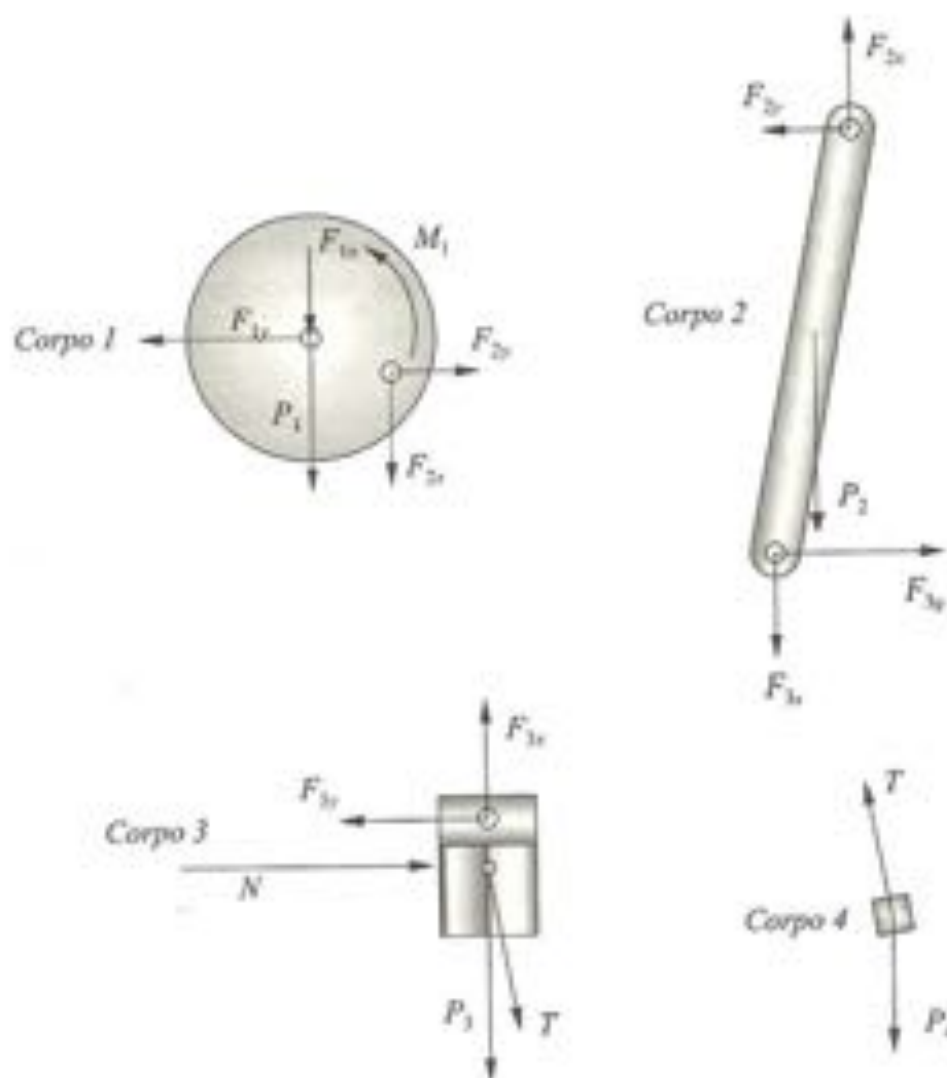


Figura 2.13

Ao resolver o sistema de equações chega-se a duas equações: a primeira delas é uma equação diferencial não linear, a qual corresponde à equação de movimento do pêndulo:

$$m_4 l_1 \ddot{\psi} + m_4 (-a_B + g) \sin \psi = 0$$

$$\ddot{\psi} + \frac{1}{l_1} \left(\frac{r \dot{\theta}^2 \cos(\theta + \beta) + l \dot{\beta}^2}{\cos \beta} + g \right) \sin \psi = 0 \quad (2.21)$$

sendo

$$\beta = \arcsin\left(\frac{r \sin \theta}{l}\right) \quad e \quad \dot{\beta} = \frac{r \dot{\theta} \cos \theta}{l \cos \beta}$$

A segunda delas é a equação que descreve o comportamento da força T em função da posição angular do pêndulo ψ :

$$T = m_4[(g - a_B) \cos \psi + \dot{\psi}^2 l_1]$$

Assim, para determinar o valor da força T precisa-se, necessariamente, resolver a equação diferencial não linear de movimento. Esta é resolvida numericamente, e os resultados são apresentados na forma gráfica no final deste exemplo.

- ⇒ **Corpo 3 (massa concentrada na extremidade do braço) – forças atuando sobre a massa 3, modelada como partícula:**

$${}_1\mathbf{P}_3 = \begin{Bmatrix} m_3 g \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_{B3}\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow {}_1\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\psi}^T {}_{B3}\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} T \cos \psi \\ T \sin \psi \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ação}$$

$${}_1\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$-({}_1\mathbf{F}_3) = \begin{Bmatrix} -F_{3x} \\ -F_{3y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{reação}$$

Aplicando-se a segunda lei de Newton, com os vetores representados na base inercial

$$\sum_{i=1}^3 {}_1\mathbf{F}_i = m_3 {}_1\mathbf{a}_B = \begin{Bmatrix} m_3 g \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} T \cos \psi \\ T \sin \psi \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -F_{3x} \\ -F_{3y} \\ 0 \end{Bmatrix} = m_3 \begin{Bmatrix} a_B \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

observam-se três incógnitas e duas equações de equilíbrio. Necessita-se, então, de mais equações, as quais são obtidas com o auxílio do corpo 2.

- ⇒ **Corpo 2 (braço) – forças atuando sobre o braço, modelado como um corpo rígido:**

$${}_1\mathbf{P}_2 = \begin{Bmatrix} m_2 g \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$-({}_1\mathbf{F}_2) = \begin{Bmatrix} -F_{2x} \\ -F_{2y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{reação}$$

$${}_{1}\mathbf{F}_3 = \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ação}$$

Aplicando-se a segunda lei de Newton, com os vetores representados na base inercial

$$\sum_{i=1}^4 {}_{1}\mathbf{F}_i = m_2 {}_{1}\mathbf{a}_2^* \Rightarrow \begin{Bmatrix} m_2 g \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -F_{2x} \\ -F_{2y} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{3x} \\ F_{3y} \\ 0 \end{Bmatrix} = m_2 \begin{Bmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

sendo \mathbf{a}_2^* a aceleração do centro de massa do braço. Esta aceleração pode ser calculada em função dos parâmetros determinados anteriormente, ou seja:

$${}_{1}\mathbf{a}_2^* = {}_{1}\mathbf{a}_B + {}_{1}\boldsymbol{\omega}_2 \times {}_{1}\boldsymbol{\omega}_2 \times {}_{1}\mathbf{l}^* + {}_{1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}_{1}\mathbf{l}^* = \begin{Bmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{em que } {}_{1}\mathbf{l}^* = \begin{Bmatrix} -l/2 \cos \beta \\ l/2 \sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pensando-se em um corpo rígido, têm-se mais equações de movimento, relacionadas aos movimentos de rotação do corpo. Utilizando a equação de Euler e fazendo o somatório das forças em relação ao ponto B, escreve-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 {}_{B2}\mathbf{M}_i &= \frac{d}{dt}({}_{B2}\mathbf{H}_B) + {}_{B2}\dot{\beta} \times {}_{B2}\mathbf{H}_B + {}_{B2}\mathbf{r}_{B-\text{cm}} \times m_2 {}_{B2}\mathbf{a}_B = \\ &= \frac{d}{dt}({}_{B2}\mathbf{I}_B \cdot {}_{B2}\dot{\beta}) + {}_{B2}\dot{\beta} \times ({}_{B2}\mathbf{I}_B \cdot {}_{B2}\dot{\beta}) + {}_{B2}\mathbf{r}_{B-\text{cm}} \times m_2 {}_{B2}\mathbf{a}_B = \\ &= {}_{B2}\mathbf{l} \times (-{}_{B2}\mathbf{F}_2) + {}_{B2}\mathbf{l}^* \times {}_{B2}\mathbf{P}_2 \end{aligned}$$

Assim, calculando-se o tensor de inércia ${}_{B2}\mathbf{I}_B$ em relação ao centro de massa do corpo, com o auxílio de tabelas com propriedades geométricas de figuras conhecidas (fornecidas no Apêndice A), e utilizando-se o teorema dos eixos paralelos para transladar as inércias do centro de massa para o ponto B, chega-se a:

$${}_{B2}\mathbf{I}_B = \begin{bmatrix} I_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_2} \end{bmatrix}$$

Desta forma, obtém-se mais uma equação para os movimentos de rotação do corpo 2 em torno do eixo Z inercial. Somando-se essas três equações de equilíbrio dinâmico para o corpo 2 e as duas para o corpo 3, chega-se a 5 equações e 5 incógnitas: N , F_{3x} , F_{3y} , F_{2x} e F_{2y} . Resolvendo-se esse sistema de 5 equações e 5 incógnitas, chega-se ao valor das cinco forças de reação.

- **Corpo 1 (disco) – forças e momentos atuando sobre o disco, modelado como um corpo rígido:**

$${}_j\mathbf{F}_1 = \begin{Bmatrix} m_1 g \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_j\mathbf{F}_2 = \begin{Bmatrix} F_{2,x} \\ F_{2,y} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_j\mathbf{F}_3 = \begin{Bmatrix} F_{1,x} \\ -F_{1,y} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_j\mathbf{M}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \end{Bmatrix}$$

Aplicando-se a segunda lei de Newton, com os vetores representados na base inercial:

$$\sum_{i=1}^3 {}_j\mathbf{F}_i = m_1 {}_j\mathbf{a}_1^* \Rightarrow \begin{Bmatrix} m_1 g \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{2,x} \\ F_{2,y} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{1,x} \\ -F_{1,y} \\ 0 \end{Bmatrix} = m_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Pensando-se em um corpo rígido, têm-se mais equações de movimento, relacionadas aos movimentos de rotação do corpo. Utilizando-se a equação de Euler e fazendo-se o somatório dos momentos em relação ao ponto O (centro de massa do disco), escreve-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 {}_R\mathbf{M}_{O_i} &= \frac{d}{dt} ({}_R\mathbf{I}_O \cdot {}_R\dot{\theta}) + {}_R\dot{\theta} \times ({}_R\mathbf{I}_O \cdot {}_R\dot{\theta}) + \underbrace{{}_R\mathbf{r}_{O-C}}_{=0} \times m_1 \underbrace{{}_R\mathbf{a}_C}_{=0} = \\ &= {}_R\mathbf{r} \times {}_R\mathbf{F}_2 + {}_R\mathbf{M}_1 \end{aligned}$$

Assim, calculando-se o tensor de inércia ${}_R\mathbf{I}_O$ em relação ao centro de massa do corpo, com o auxílio de tabelas com propriedades geométricas conhecidas, tem-se:

$${}_R\mathbf{I}_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Obtêm-se, dessa forma, mais uma equação para os movimentos de rotação do corpo I em torno do eixo Z inercial. Essas três equações de equilíbrio dinâmico para o corpo I permitem que as reações $F_{1,x}$, $F_{1,y}$ e o momento M_1 aplicado para que a rotação do disco seja constante, sejam calculados.

Adotando-se valores numéricos para os parâmetros do sistema em questão, escreve-se um programa numérico para integrar a equação de movimento (2.21) e obter o comportamento dinâmico do pêndulo e das forças de reação.

Os gráficos da página a seguir ilustram o comportamento dinâmico do pêndulo em duas condições distintas: a primeira quando o mesmo se equilibra em torno do ângulo $\psi = 0$ [rad] e a segunda mostrando que a posição invertida $\psi = \pi$ [rad] passa a ser uma posição estável quando o disco gira com uma velocidade angular constante $\dot{\theta} = 80\pi$ [rad/s]. Essas equações foram resolvidas numericamente por expansão em série de Taylor, com um incremento no tempo Δt da ordem de 10^{-4} [s].



Figura 2.14

Sistema biela-manivela-pêndulo operando com velocidade angular $\dot{\theta} = 0$ [rad/s] para o motor; posição de equilíbrio do pêndulo em torno de $\psi = 0$.

As Figuras 2.15, 2.16 e 2.17 mostram o comportamento do deslocamento angular $\psi(t)$, da velocidade angular $\dot{\psi}(t)$ e da aceleração $\ddot{\psi}(t)$ do pêndulo com as seguintes condições iniciais: $\psi(0) = 0,98 \cdot \pi$ rad e $\dot{\psi}(0) = 0$ rad/s, com o sistema biela-manivela operando com uma velocidade angular $\dot{\theta} = 0$ rad/s, ou seja, o motor não gira. Observa-se que nessas condições o pêndulo se encontra oscilando em torno do ângulo $\psi = 0$.

As Figuras 2.19, 2.20 e 2.21 mostram o comportamento do deslocamento angular $\psi(t)$, da velocidade angular $\dot{\psi}(t)$ e da aceleração angular $\ddot{\psi}(t)$ do pêndulo para as seguintes condições iniciais de movimento: $\psi = 0,98 \cdot \pi$ rad e $\dot{\psi}(0) = 0$ rad/s, com o sistema biela-manivela operando com uma velocidade angular $\dot{\theta} = 80(\pi)$ rad/s, constante. Observa-se que, nessas condições de velocidade do rotor, o pêndulo encontra-se em equilíbrio na posição invertida, ou seja, em torno de um ângulo de 3,14 rad (veja animações gráficas e filmagem no CD-ROM).

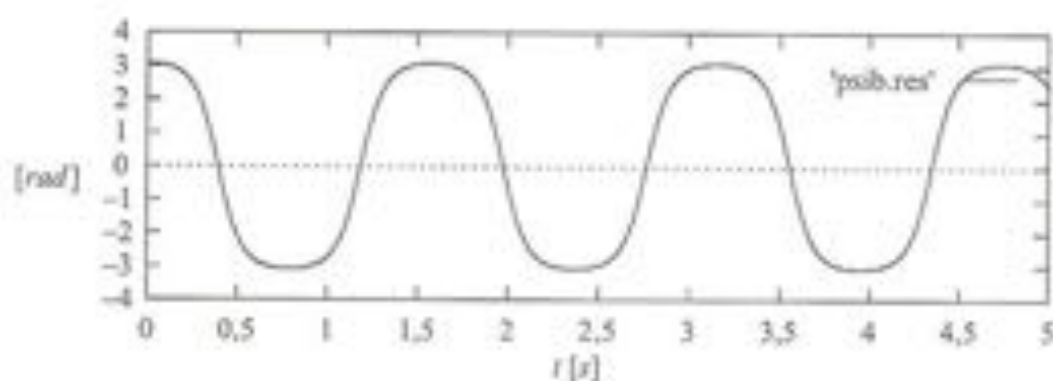


Figura 2.15
Deslocamento angular $\varphi(t)$ [rad] em função do tempo t [s].

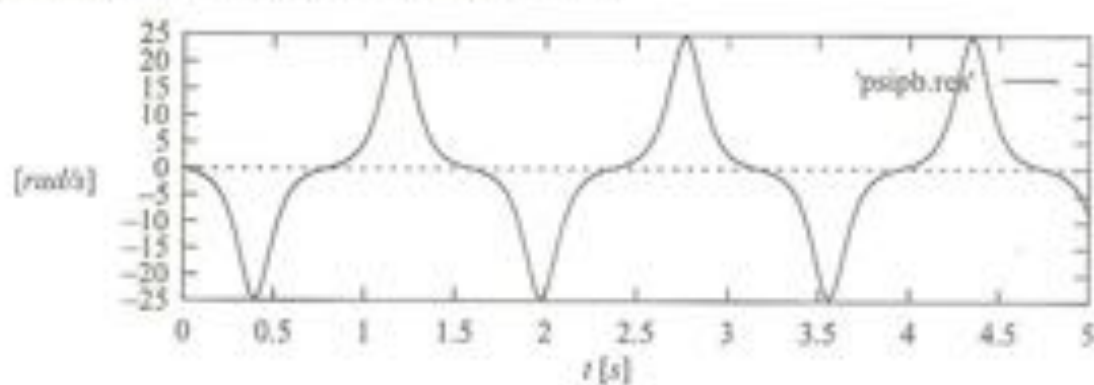


Figura 2.16
Velocidade angular $\dot{\psi}(t)$ [rad/s] em função do tempo t [s].

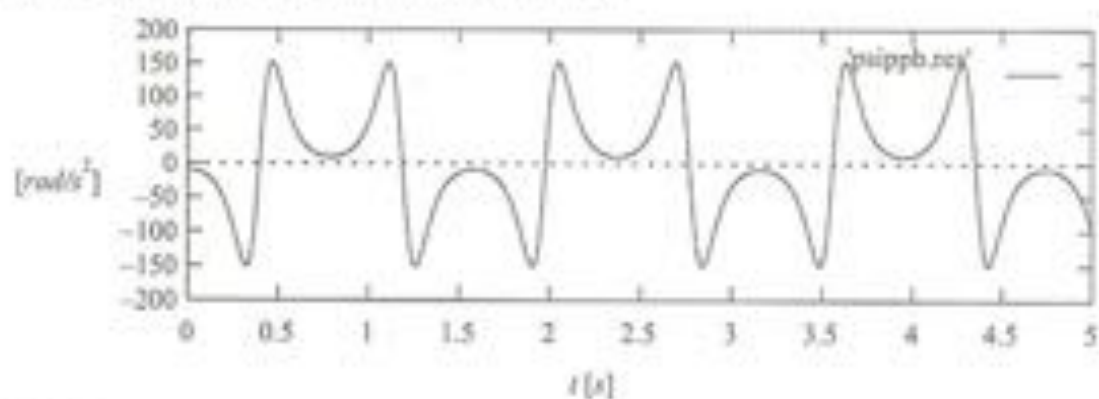


Figura 2.17
Aceleração angular $\ddot{\psi}(t)$ [rad/s²] em função do tempo t [s].



Figura 2.18
Sistema biela-manivela-pêndulo operando com velocidade angular $\dot{\theta} = 80\pi$ [rad/s] para o motor; posição de equilíbrio do pêndulo em torno de $\psi = \pi$ [rad/s].

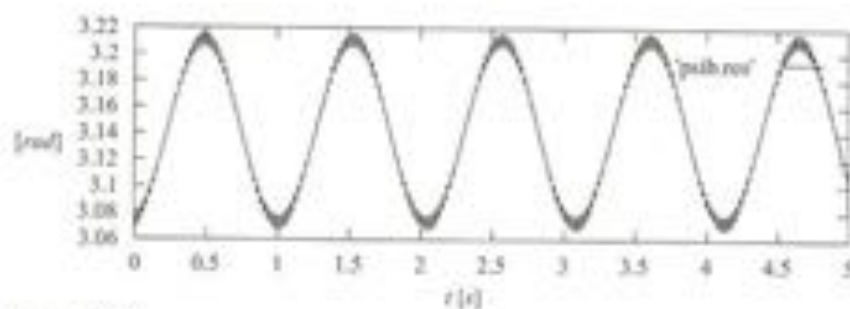


Figura 2.19
Deslocamento angular $\psi(t)$ [rad] em função do tempo t [s].

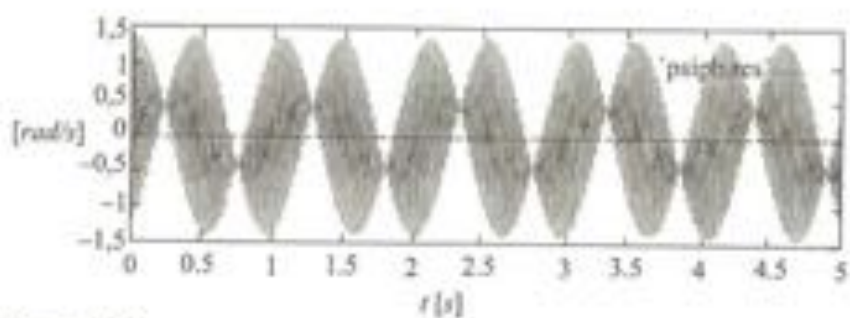


Figura 2.20
Velocidade angular $\dot{\psi}(t)$ [rad/s] em função do tempo t [s].

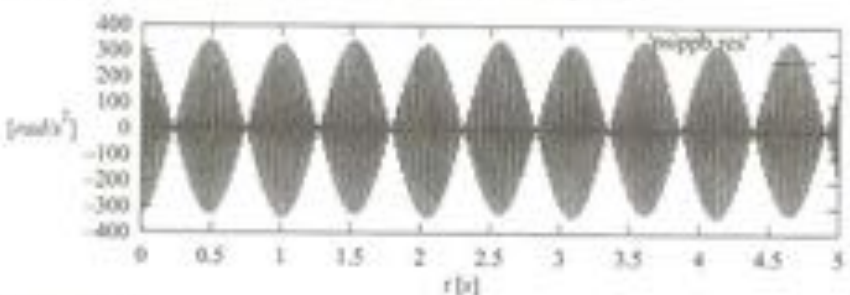


Figura 2.21
Aceleração angular $\ddot{\psi}(t)$ [rad/s²] em função do tempo t [s].

2.7 Sistema de Múltiplos Corpos no Plano com Deslizamento (Reações Dinâmicas)

Exemplo 6

Foi dito nos itens anteriores que, se um corpo é rígido, a distância entre dois pontos A e B pertencentes a um mesmo corpo, r_{AB} permanece sempre constante. Quando a representação deste vetor é feita no sistema móvel solidário ao corpo, ou seja, r_{AB}^* ela fica independente do tempo. Isto faz com que a velocidade e a aceleração (relativas) entre esses dois pontos sejam sempre nulas.

Foi dito, também, que os termos de velocidade relativa e aceleração relativa só deveriam aparecer no sistema de referência solidário a um corpo rígido quando os movimentos de outros corpos fossem descritos em relação a este, e deslizamentos relativos entre os mesmos fossem detectados. O exemplo em questão ilustra exatamente o caso mencionado. Novamente, sugere-se ao leitor que releia o item 2.4 para facilitar o entendimento da metodologia da resolução do problema, em que o objetivo é a obtenção das reações dinâmicas entre os componentes do mecanismo.

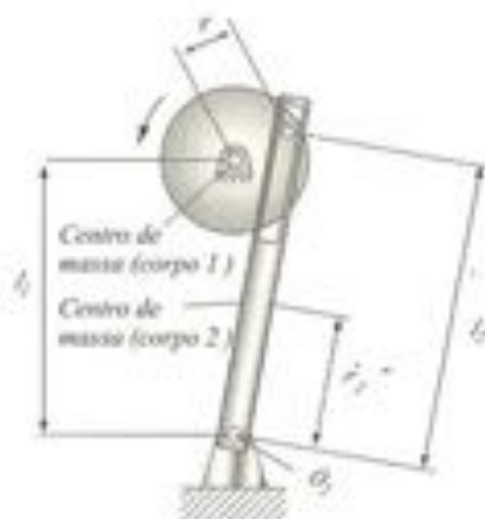


Figura 2.22
Dados geométricos do disco e da viga.

1. *Sistemas de referência:* para a solução do problema, utiliza-se um sistema de referência móvel por corpo, além do sistema inercial, ou seja:
 - I : Sistema inercial com eixos X, Y, Z e representado pelos cursores i, j, k (origem O_1).
 - $B1$: Sistema móvel com eixos X_r, Y_r, Z_r solidário ao corpo 1 (disco) e representado pelos cursores i_r, j_r, k_r (origem O_1).

- B2: Sistema móvel com eixos X_2, Y_2, Z_2 solidário ao corpo 2 (haste com rasgo) e representado pelos cursores $\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2$ (origem O_2).

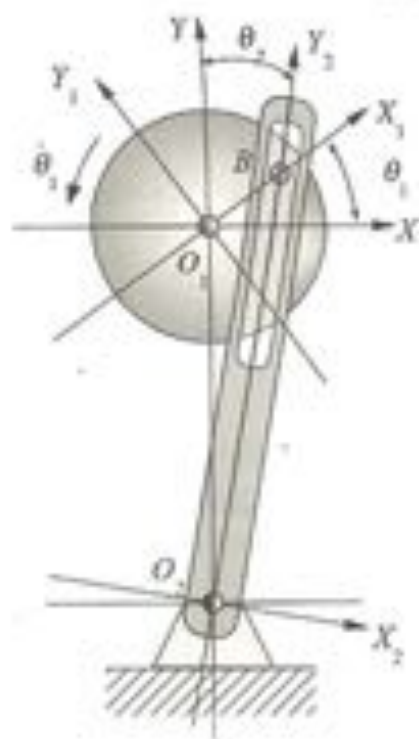


Figura 2.23
Dados geométricos do disco e da viga.

2. Matrizes de transformação de coordenadas e relações entre ângulos: uma vez definidos os sistemas de referência, é necessário que se consiga sempre passar de um para o outro sem dificuldades. Isto é feito com o auxílio das matrizes de transformação de coordenadas.

A matriz de transformação de coordenadas do sistema inercial para o móvel B1, o qual gira solidário ao disco (corpo 1), é:

$$\mathbf{T}_{\theta_1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{em que} \quad {}_{a1}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\theta_1} \mathbf{s}$$

A matriz de transformação de coordenadas do sistema inercial para o móvel B2, o qual gira solidário com o braço do mecanismo (corpo 2), é:

$$\mathbf{T}_{\theta_2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{em que} \quad {}_{a2}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\theta_2} \mathbf{s}$$

Ressalta-se aqui que as rotações θ_1 e θ_2 são supostas positivas (rotação positiva em torno do eixo Z – inercial). Isto significa que, quando θ_1 estiver na posição mostrada na Figura 2.23, terá valores negativos, enquanto θ_2 assumirá valores positivos na posição ilustrada no desenho.

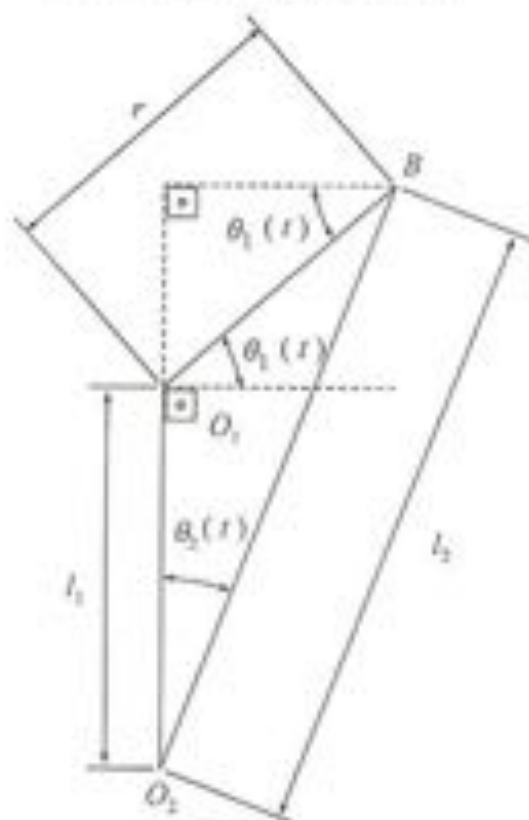


Figura 2.24
Relações geométricas entre os ângulos de acionamento e o ângulo do braço acionado.

Quando se trabalha com mecanismos ou sistemas de corpos rígidos com vínculos cinemáticos, os ângulos das matrizes de transformação de coordenadas podem ser descritos em função do ângulo de acionamento, utilizando-se, para isto, as relações geométricas do mecanismo. Assim, após a definição das matrizes de transformação de coordenadas, faz-se necessário calcular a relação existente entre os ângulos θ_1 (ângulo motor) e θ_2 (ângulo movido).

$$\tan \theta_2 = \frac{r \cos \theta_1}{l_1 + r \sin \theta_1}$$

Logo, pode-se obter diretamente θ_2 em função de θ_1 :

$$\theta_2 = \arctan \left(\frac{r \cos \theta_1}{l_1 + r \sin \theta_1} \right) \quad (2.24)$$

3. Velocidades e acelerações dos sistemas móveis de referência: a velocidade e a aceleração angulares do corpo 1 (disco) são conhecidas e dadas por:

$$\text{Base B1: } {}_1\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad {}_1\dot{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ pois } \theta_1 \text{ é conhecida e constante}$$

A velocidade e a aceleração do corpo 2 (haste) são incógnitas do problema. Adota-se, então, uma rotação positiva em torno do eixo Z inercial:

$$\text{Base B2: } {}_1\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad {}_1\dot{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix}, \text{ amplitudes desconhecidas, mas direções conhecidas.}$$

4. Grandezas escritas de forma vetorial:

$${}_{B1}\mathbf{r}_{O1B} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow {}_1\mathbf{r}_{O1B} = \mathbf{T}_{B1}^T \cdot {}_{B1}\mathbf{r}_{O1B} \Rightarrow {}_1\mathbf{r}_{O1B} = \begin{pmatrix} r \cos \theta_1 \\ r \sin \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}_1\mathbf{r}_{O2B} = \begin{pmatrix} r \cos \theta_1 \\ l_1 + r \sin \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Relações de velocidade: com o auxílio do sistema móvel B1, pode-se escrever a velocidade para o ponto B, ponto este pertencente ao disco, da seguinte forma:

$${}_1\mathbf{v}_B = {}_1\mathbf{v}_{O1} + {}_1\omega_1 \times {}_1\mathbf{r}_{O1B} + {}_1\mathbf{v}_{B/O1B} = {}_1\omega_1 \times {}_1\mathbf{r}_{O1B} \quad (2.25)$$

A velocidade do ponto O_1 , ponto onde a origem do sistema móvel B1 foi posicionada, é zero, pois este ponto está fixo no sistema inercial. A velocidade relativa do ponto B em relação ao ponto O_1 , também é zero, pois os dois pontos pertencem ao mesmo corpo rígido. Utilizando-se a definição de velocidade relativa tem-se:

$${}_1\mathbf{v}_{B/O1B} = \mathbf{T}_{B1}^T \frac{d}{dt} ({}_{B1}\mathbf{r}_{O1B}) = \mathbf{T}_{B1}^T \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

pois r independe do tempo.

Com o auxílio do sistema móvel B2 pode-se escrever a velocidade do ponto B como:

$${}_1\mathbf{v}_B = {}_1\mathbf{v}_{O2} + {}_1\omega_2 \times {}_1\mathbf{r}_{O2B} + {}_1\mathbf{v}_{B/O2B} = {}_1\omega_2 \times {}_1\mathbf{r}_{O2B} + {}_1\mathbf{v}_{B/O2B} \quad (2.26)$$

Neste caso, a velocidade do ponto O_2 , ponto onde o sistema móvel B2 foi posicionado, também é zero. A velocidade relativa entre o ponto B e o ponto O_2 é diferente de

zero, porque ocorre um deslizamento do ponto B (fixo no corpo 1) ao longo do raio pertencente ao corpo 2. Sabe-se, então, que a velocidade relativa do ponto B em relação ao ponto O_2 , descrita na base móvel B2, está sempre na direção Y2, pois o ponto B escorrega sobre o eixo Y2. O valor da amplitude da velocidade relativa é considerado desconhecido. Valendo-se de uma variável v_{rel} , escreve-se a velocidade relativa de forma vetorial:

$${}_{B2}\mathbf{v}_{Brel_{O2B}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_{rel} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow {}_1\mathbf{v}_{Brel_{O2B}} = \mathbf{T}_{\theta_1, B2}^T \mathbf{v}_{Brel_{O2B}} = \begin{Bmatrix} -v_{rel} \sin \theta_2 \\ v_{rel} \cos \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Como o braço e o disco estão acoplados através do ponto B (condição para funcionamento do mecanismo, vínculo), a velocidade absoluta deste ponto, descrita tanto com o auxílio da base móvel B1, solidária ao disco, quanto com o auxílio da base móvel B2, solidária à haste, são iguais. Logo, pode-se escrever a seguinte igualdade entre as Equações 2.25 e 2.26.

$${}_1\omega_1 \times {}_1\mathbf{r}_{O1B} = {}_1\omega_2 \times {}_1\mathbf{r}_{O2B} + {}_1\mathbf{v}_{Brel_{O2B}}$$

Desenvolvendo estes termos tem-se:

$${}_1\omega_1 \times {}_1\mathbf{r}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \\ r \cos \theta_1 & r \sin \theta_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_1 r \sin \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 r \cos \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_1\omega_2 \times {}_1\mathbf{r}_{O2B} + {}_1\mathbf{v}_{Brel_{O2B}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ r \cos \theta_1 & l_1 + r \sin \theta_1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{Bmatrix} -v_{rel} \sin \theta_2 \\ v_{rel} \cos \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_2 l_1 - \dot{\theta}_2 r \sin \theta_1 - v_{rel} \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 r \cos \theta_1 + v_{rel} \cos \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Iguando as duas velocidades, chega-se a duas equações com duas incógnitas, v_{rel} e $\dot{\theta}_2$:

$$\begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_1 r \sin \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 r \cos \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_2 (l_1 + r \sin \theta_1) - v_{rel} \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 r \cos \theta_1 + v_{rel} \cos \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Reescrevendo esta equação de forma matricial, evidenciando as respectivas incógnitas, as quais devem ser calculadas, tem-se:

$$\begin{bmatrix} -(l_1 + r \sin \theta_1) & -\sin \theta_2 \\ r \cos \theta_1 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ v_{B1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_1 r \sin \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 r \cos \theta_1 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema de equações por Cramer, tem-se:

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\dot{\theta}_1 r \sin \theta_1 & -\sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 r \cos \theta_1 & \cos \theta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(l_1 + r \sin \theta_1) & -\sin \theta_2 \\ r \cos \theta_1 & \cos \theta_2 \end{vmatrix}} = \frac{\dot{\theta}_1 r \sin(\theta_1 - \theta_2)}{r \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_1 \cos \theta_2}$$

$$v_{B1} = \frac{\begin{vmatrix} -(l_1 + r \sin \theta_1) & -\dot{\theta}_1 r \sin \theta_1 \\ r \cos \theta_1 & \dot{\theta}_1 r \cos \theta_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(l_1 + r \sin \theta_1) & -\sin \theta_2 \\ r \cos \theta_1 & \cos \theta_2 \end{vmatrix}} = \frac{\dot{\theta}_1 r l_1 \cos \theta_1}{r \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_1 \cos \theta_2}$$

6. *Relações de aceleração:* analogamente, calculam-se as acelerações angulares e lineares da viga. Fazendo-se uso inicialmente das informações obtidas através da base móvel B1 escreve-se a aceleração linear absoluta do ponto B:

$${}_1 \mathbf{a}_B = \underbrace{{}_1 \mathbf{a}_{O1}}_{=0} + \underbrace{{}_1 \dot{\omega}_1 \times {}_1 \mathbf{r}_{O1B}}_{=0} + \underbrace{{}_1 \omega_1 \times ({}_1 \dot{\omega}_1 \times {}_1 \mathbf{r}_{O1B})}_{=0} + \underbrace{2 \cdot {}_1 \omega_1 \times {}_1 \mathbf{v}_{B1/O1B}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{a}_{B1/O1B}}_{=0}$$

Logo:

$${}_1 \mathbf{a}_B = {}_1 \omega_1 \times ({}_1 \dot{\omega}_1 \times {}_1 \mathbf{r}_{O1B}) = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_1^2 r \cos \theta_1 \\ -\dot{\theta}_1^2 r \sin \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Fazendo-se uso agora da base móvel B2, escreve-se que a aceleração linear absoluta do ponto B é dada por:

$${}_1 \mathbf{a}_B = {}_1 \mathbf{a}_{O2} + {}_1 \dot{\omega}_2 \times {}_1 \mathbf{r}_{O2B} + {}_1 \omega_2 \times ({}_1 \dot{\omega}_2 \times {}_1 \mathbf{r}_{O2B}) + 2 \cdot {}_1 \omega_2 \times {}_1 \mathbf{v}_{B2/O2B} + {}_1 \mathbf{a}_{B2/O2B}$$

Calculando-se cada termo da equação tem-se:

$${}_1 \mathbf{a}_{O2} = 0$$

$${}_1 \dot{\omega}_2 \times {}_1 \mathbf{r}_{O2B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ r \cos \theta_1 & (l_1 + r \sin \theta_1) & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_2 (l_1 + r \sin \theta_1) \\ \dot{\theta}_2 r \cos \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 {}_1\omega_2 \times {}_1\omega_2 \times {}_1r_{O_2B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_2(l_1 + r \sin \theta_1) & \dot{\theta}_2 r \cos \theta_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_2^2 r \cos \theta_1 \\ -\dot{\theta}_2^2(l_1 + r \sin \theta_1) \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 2 \, {}_1\omega_2 \times {}_1v_{B/O_2B} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ -v_{rel} \sin \theta_2 & v_{rel} \cos \theta_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -2\dot{\theta}_2 v_{rel} \cos \theta_2 \\ -2\dot{\theta}_2 v_{rel} \sin \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

A aceleração relativa entre o ponto B e o ponto O_2 é diferente de zero, pois ocorre um deslizamento do ponto B (fixo no corpo 1) ao longo do rasgo pertencente ao corpo 2. Sabe-se, então, que a aceleração relativa do ponto B em relação ao ponto O_2 , descrita na base móvel B2, está sempre na direção Y_2 , pois o ponto B escorrega sobre o eixo Y_2 . O valor da amplitude da aceleração relativa é considerado desconhecido. Valendo-se de uma variável a_{rel} , escreve-se a aceleração relativa de forma vetorial:

$${}_{B2} \mathbf{a}_{rel/O_2B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ a_{rel} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow {}_1 \mathbf{a}_{rel/O_2B} = \mathbf{T}_{B2}^T {}_{B2} \mathbf{a}_{rel/O_2B} = \begin{Bmatrix} -a_{rel} \sin \theta_2 \\ a_{rel} \cos \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Assim, somando-se todos os termos calculados, chega-se que:

$${}_1 \mathbf{a}_B = \begin{Bmatrix} -\ddot{\theta}_2(l_1 + r \sin \theta_1) - \dot{\theta}_2^2 r \cos \theta_1 - 2\dot{\theta}_2 v_{rel} \cos \theta_2 - a_{rel} \sin \theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 r \cos \theta_1 - \dot{\theta}_2^2(l_1 + r \sin \theta_1) - 2\dot{\theta}_2 v_{rel} \sin \theta_2 + a_{rel} \cos \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A condição de funcionamento do mecanismo é que as acelerações do ponto B, ora calculada com auxílio do sistema móvel B1, ora do sistema móvel B2, sejam iguais, ou melhor:

$$\begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_1^2 r \cos \theta_1 \\ -\dot{\theta}_1^2 r \sin \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\ddot{\theta}_2(l_1 + r \sin \theta_1) - \dot{\theta}_2^2 r \cos \theta_1 - 2\dot{\theta}_2 v_{rel} \cos \theta_2 - a_{rel} \sin \theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 r \cos \theta_1 - \dot{\theta}_2^2(l_1 + r \sin \theta_1) - 2\dot{\theta}_2 v_{rel} \sin \theta_2 + a_{rel} \cos \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Reescrevendo a equação de forma matricial, isolando-se as incógnitas $\ddot{\theta}_2$ e a_{rel} tem-se:

$$\begin{vmatrix} -(l_1 + r \sin \theta_1) & -\sin \theta_2 \\ r \cos \theta_1 & \cos \theta_2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ a_{rel} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_1^2 r \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 r \cos \theta_1 + 2\dot{\theta}_2 v_{rel} \cos \theta_2 \\ -\dot{\theta}_1^2 r \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2^2(l_1 + r \sin \theta_1) + 2\dot{\theta}_2 v_{rel} \sin \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo-se por Cramer, obtém-se

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (-\dot{\theta}_1^2 r \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 r \cos \theta_1 + 2\dot{\theta}_2 v_{rel} \cos \theta_2) & -\sin \theta_2 \\ (-\dot{\theta}_1^2 r \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 (l_1 + r \sin \theta_1) + 2\dot{\theta}_2 v_{rel} \sin \theta_2) & \cos \theta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(l_1 + r \sin \theta_1) & -\sin \theta_2 \\ r \cos \theta_1 & \cos \theta_2 \end{vmatrix}}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{r(\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}_1^2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 l_1 \sin \theta_2 + 2\dot{\theta}_2 v_{rel}}{-(l_1 \cos \theta_2 + r \sin(\theta_1 - \theta_2))}$$

$$a_{rel} = \frac{\begin{vmatrix} -(l_1 + r \sin \theta_1) & (-\dot{\theta}_1^2 r \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 r \cos \theta_1 + 2\dot{\theta}_2 v_{rel} \cos \theta_2) \\ r \cos \theta_1 & (-\dot{\theta}_1^2 r \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 (l_1 + r \sin \theta_1) + 2\dot{\theta}_2 v_{rel} \sin \theta_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -(l_1 + r \sin \theta_1) & -\sin \theta_2 \\ r \cos \theta_1 & \cos \theta_2 \end{vmatrix}}$$

$$a_{rel} = \frac{r(\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_2^2)(r + l_1 \sin \theta_1) - \dot{\theta}_2 v_{rel}(2r \cos(\theta_2 - \theta_1) + 2l_1 \sin \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 l_1 (l_1 + r \sin \theta_1)}{-(l_1 \cos \theta_2 + r \sin(\theta_1 - \theta_2))}$$

Observa-se que θ_2 é obtido no Item 2, enquanto $\dot{\theta}_2$ e v_{rel} são calculados no Item 5.

7. Cálculo da velocidade e da aceleração linear absoluta do centro de massa de cada componente do mecanismo: a velocidade linear absoluta do centro de massa do disco (corpo 1) é dada por:

$${}_1 \mathbf{v}_1^* = 0$$

pois o centro de massa do disco encontra-se posicionado no ponto O_1 .

A aceleração linear absoluta do centro de massa do disco (corpo 1) é dada por:

$${}_1 \mathbf{a}_1^* = 0$$

pois o centro de massa do disco encontra-se posicionado no ponto O_1 .

A velocidade linear absoluta do centro de massa da haste com rasgo (corpo 2) é dada por:

$${}_1 \mathbf{v}_2^* = \underbrace{{}_1 \mathbf{v}_{O_2}}_{=0} + \underbrace{{}_1 \omega_2 \times}_1 \mathbf{r}_2^* + \underbrace{{}_1 \mathbf{v}_{rel(O_2)}}_{=0}$$

em que ${}_1 \mathbf{r}_2^*$ é o vetor que tem origem no ponto O_1 e vai até o centro de massa da haste com o rasgo. Ressalta-se aqui que o centro de massa da haste \mathbf{r}_2^* pode ser calculado com base nas dimensões da haste e do rasgo. Sabe-se, a priori, que o vetor ${}_{B_2} \mathbf{r}_2^* = \begin{bmatrix} 0 & r_2^* & 0 \end{bmatrix}^T$ pode ser reescrito na base inercial com auxílio da matriz de transformação de coordenadas $\mathbf{T}_{B_2}^I$. Logo, sendo ${}_1 \mathbf{r}_2^* = \begin{bmatrix} -r_2^* \sin \theta_2 & r_2^* \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix}^T$, obtém-se:

$${}^1\mathbf{v}_2^* = {}^1\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^1\mathbf{r}_2^* = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_2 r_2^* \cos \theta_2 \\ -\dot{\theta}_2 r_2^* \sin \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A aceleração linear absoluta do centro de massa da haste com rasgo (corpo 2) pode ser calculada com o auxílio da seguinte expressão:

$${}^1\mathbf{a}_2^* = \underbrace{{}^1\mathbf{a}_{O2}}_{=0} + {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}^1\mathbf{r}_2^* + {}^1\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^1\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^1\mathbf{r}_2^*) + \underbrace{2 \cdot {}^1\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^1\mathbf{v}_{R2/O2}}_{=0} + \underbrace{{}^1\mathbf{a}_{R2/O2}}_{=0}$$

$${}^1\mathbf{a}_2^* = {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times {}^1\mathbf{r}_2^* + {}^1\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^1\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^1\mathbf{r}_2^*) = \begin{Bmatrix} -\ddot{\theta}_2 r_2^* \cos \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 r_2^* \sin \theta_2 \\ -\ddot{\theta}_2 r_2^* \sin \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 r_2^* \cos \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

8. *DCL – Diagrama de Corpo Livre:* após o cálculo das velocidades e acelerações envolvidas no movimento do mecanismo, inicia-se a determinação das forças de reação atuantes nos vários corpos do mecanismo através do equilíbrio dinâmico de Newton e Euler. Como os dois corpos são modelados como corpos rígidos no plano, existirão seis equações disponíveis. Pelo diagrama de corpo livre da Figura 2.25, pode-se contar seis incógnitas. Logo, não existirá nenhuma equação livre de movimento, e as reações são calculadas diretamente com o auxílio da somatória de forças e momentos.



Figura 2.25
Diagrama de corpo livre do mecanismo.

□ *Disco – Corpo 1:*

$$\text{Força peso: } {}^1\mathbf{P}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Força de reação: } {}^1\mathbf{F}_1 = \begin{Bmatrix} -F_{1x} \\ -F_{1y} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Momento de acionamento: } {}_1\mathbf{M}_{O1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Força normal de conexão (ação): } {}_{B2}\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Representando a força normal de conexão no sistema inercial, tem-se:

$${}_1\mathbf{N} = \mathbf{T}_{B2}^T \cdot {}_{B2}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \cos\theta_2 \\ N \sin\theta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O momento de acionamento pode ser representado tanto no sistema inercial I quanto no sistema móvel $B1$, pois ele ocorre no eixo Z inercial, eixo este que coincide com o eixo $Z1$ do sistema $B1$. Assim,

$${}_{B1}\mathbf{M}_{O1} = \mathbf{T}_{B1} \cdot {}_1\mathbf{M}_{O1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \end{pmatrix}$$

□ *Haste com raio – corpo 2:*

$$\text{Força peso: } {}_1\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2g \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Força de reação: } {}_1\mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} F_{2x} \\ -F_{2x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Força normal de conexão (reação): } -({}_{B2}\mathbf{N}) = \begin{pmatrix} -N \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ressalta-se aqui que a força N é mais facilmente representada no sistema móvel $B2$, pois fica sempre perpendicular à haste, ou seja, sempre na direção $X2$. Caso necessite-se de sua representação no sistema inercial ou no sistema móvel $B1$, utilizam-se as matrizes de transformação de coordenadas:

$$-({}_1\mathbf{N}) = \mathbf{T}_{\theta_2}^T (-{}_{B2}\mathbf{N}) = \begin{bmatrix} -N \cos \theta_2 \\ -N \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-({}_{B1}\mathbf{N}) = \mathbf{T}_{\theta_1} (-{}_1\mathbf{N}) = \begin{bmatrix} -N \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ N \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

9. Equilíbrio dinâmico – Newton-Euler:

- *Disco:* o centro de massa do disco não está em movimento, pois este ponto coincide com o ponto O_1 . Assim não tem nem velocidade linear, nem aceleração linear, e a somatória de forças é igualada a zero:

$$\sum {}_1\mathbf{F} = {}_1\mathbf{P}_1 + {}_1\mathbf{F}_1 + {}_1\mathbf{N} = m_1 \underbrace{{}_1\mathbf{a}_1}_{=0} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -F_{1x} \\ -F_{1y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N \cos \theta_2 \\ N \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Ao realizar a somatória de momentos no disco, sabe-se que sua velocidade angular ${}_{B1}\omega_1 = {}_{B1}\omega_1$ é constante. Portanto, a aceleração angular será igual a zero. Logo:

$$\sum {}_{B1}\mathbf{M}_{O1} = {}_{B1}\mathbf{M}_1 + {}_{B1}\mathbf{r}_{O1B} \times {}_{B1}\mathbf{N} = {}_{B1}\mathbf{I}_{O1} \underbrace{\frac{d}{{}_{B1}\omega_1}}_{=0} +$$

$$\underbrace{{}_{B1}\omega_1 \times ({}_{B1}\mathbf{I}_{O1} {}_{B1}\omega_1)}_{=0 \text{ pois } \mathbf{I}_{O1} \text{ diagonal}} = \mathbf{0} + \underbrace{{}_{B1}\mathbf{r}_{O1B}}_{=0} \times m_1 \underbrace{{}_{B1}\mathbf{a}_{O1}}_{=0}$$

Faz-se notar neste instante que o produto vetorial ${}_{B1}\omega_1 \times ({}_{B1}\mathbf{I}_{O1} {}_{B1}\omega_1)$ será sempre nulo para movimentos planos com tensor de inércia diagonal. Isto decorre do fato de os vetores ${}_{B1}\omega_1$ e ${}_{B1}\mathbf{I}_{O1} {}_{B1}\omega_1$ serem sempre paralelos, no caso de movimentos em duas dimensões ou planos. Assim,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ r & 0 & 0 \\ N \cos(\theta_1 - \theta_2) & -N \sin(\theta_1 - \theta_2) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 - r N \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo, tem-se mais uma equação que descreve o equilíbrio dinâmico do corpo 1:

$$M_1 - r N \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad (2.28)$$

- *Haste com rasgo:* para a viga, a aceleração linear absoluta do centro de massa foi calculada no Item 7. Assim:

$$\sum \mathbf{F} = {}_1\mathbf{F}_2 + {}_1\mathbf{P}_2 - {}_1\mathbf{N} = m_2 \mathbf{a}_2^*$$

$$\begin{bmatrix} F_{2x} \\ -F_{2y} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 g \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -N \cos \theta_2 \\ -N \sin \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} = m_2 \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_2 r_2^* \cos \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 r_2^* \sin \theta_2 \\ -\ddot{\theta}_2 r_2^* \sin \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 r_2^* \cos \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Escrevendo-se a somatória de momentos sobre o corpo 2, lembrando-se de que o tensor de inércia da haste em relação ao ponto O_2 pode ser calculado em função das características geométricas da haste e do teorema dos eixos paralelos, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum {}_{R2}\mathbf{M}_{O2} &= {}_{R2}\mathbf{r}_{O2B} \times (-{}_{R2}\mathbf{N}) + {}_{R2}\mathbf{r}_2^* \times {}_{R2}\mathbf{P} = {}_{R2}\mathbf{I}_{O2} \frac{d}{{dt}}({}_{R2}\boldsymbol{\omega}_2) + \\ &+ \underbrace{{}_{R2}\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}_{R2}\mathbf{I}_{O2} {}_{R2}\boldsymbol{\omega}_2)}_{=0 \text{ (eixo } r \text{ e } {}_{R2}\mathbf{I}_{O2} \text{ diagonal)}} + {}_{R2}\mathbf{r}_{O2 \rightarrow C} \times m_2 \underbrace{{}_{R2}\mathbf{a}_{O2}}_{=0} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} i_2 & j_2 & k_2 \\ 0 & l_2 & 0 \\ -N & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_2 & j_2 & k_2 \\ 0 & r_2^* & 0 \\ -m_2 g \sin \theta_2 & -m_2 g \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} l_2 & j_2 & k_2 \\ 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \\ 0 & 0 & I_{zz} \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}}_{=0 \text{ (eixo } r \text{ e } {}_{R2}\mathbf{I}_{O2} \text{ diagonal)}}$$

Deste equilíbrio resulta uma única equação na direção Z_2 :

$$\Rightarrow l_2 N + m_2 g r_2^* \sin \theta_2 = I_{zz} \ddot{\theta}_2 \quad \text{ou} \quad N = \frac{-m_2 g r_2^* \sin \theta_2 + I_{zz} \ddot{\theta}_2}{l_2} \quad (2.30)$$

Substituindo-se a Equação 2.30 nas Equações 2.27, 2.28 e 2.29, obtêm-se os valores das outras cinco incógnitas do problema, ou seja, as reações dinâmicas M_1 , F_{1x} , F_{1y} , F_{2x} e F_{2y} . Estas incógnitas ficam descritas em função dos dados geométricos do mecanismo e das variáveis θ_1 e θ_2 (posições angulares calculadas no Item 2), $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$ (velocidades angulares calculadas no Item 5) e, finalmente, $\ddot{\theta}_2$ (aceleração angular da haste calculada no Item 6).

Desta forma, dados a massa e o momento de inércia da haste com rasgo (m_2 , I_{zz}), e os parâmetros geométricos dos corpos (r , r_2^*), juntamente com as condições de operação do elemento acionador (velocidade angular $\dot{\theta}_1$ constante), torna-se possível, através desses cálculos, obter o valor do torque de acionamento M_1 mínimo para colocar o mecanismo em funcionamento com base na Equação 2.28.

$$M_1 = r \frac{-m_2 g r_2^* \sin \theta_2 + I_{ZZ} \ddot{\theta}_2}{l_2} \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

e nas grandezas cinemáticas. Calculam-se também as forças de interação entre os vários componentes para um possível dimensionamento, usando-se os conceitos estudados em Resistência dos Materiais.

2.8 Sistema de Múltiplos Corpos no Plano com Deslizamento (Equações de Movimento + Reações Dinâmicas)

Exemplo 7

O mecanismo mostrado na Figura 2.26 é acionado com o auxílio da viga AB, a qual gira em torno de A com uma velocidade angular constante $\dot{\beta}_1$ [rad/s]. A viga BD desliza e gira em relação ao ponto C com uma velocidade e aceleração angular de $\dot{\beta}_2$ [rad/s] e $\ddot{\beta}_2$ [rad/s²], acionando o pêndulo DE. Conhecidos os comprimentos l_0 , l_1 , l_2 e l_3 [m] e o ângulo β_1 em um dado instante:

1. Calcule o ângulo β_2 em função dos parâmetros conhecidos l_0 , l_1 , $\dot{\beta}_1$.
2. Assumindo-se um sistema de referência móvel para cada um dos corpos, ou seja, B1 solidário à viga AB com origem no ponto A, B2 solidário à viga BD com origem no ponto B e B3 solidário ao pêndulo DE com origem no ponto D, determine as matrizes de transformação de coordenadas \mathbf{T}_{B1} entre o sistema móvel B1 e o inercial I, \mathbf{T}_{B2} entre o sistema móvel B2 e o inercial I e \mathbf{T}_{B3} entre o sistema móvel B3 e o inercial I.

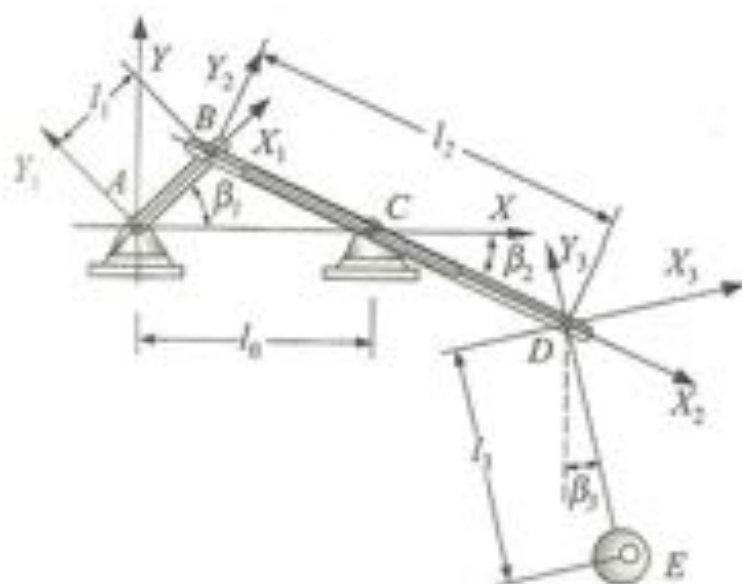


Figura 2.26
Mecanismo acoplado a um pêndulo simples.

3. Calcule a velocidade angular da viga 2, $\dot{\beta}_2$.
4. Calcule a velocidade linear do ponto D, \mathbf{v}_D .
5. Calcule a velocidade linear do ponto E, \mathbf{v}_E .
6. Calcule a aceleração angular da viga 2, $\ddot{\beta}_2$.
7. Indique como você calcularia a aceleração linear do ponto E, \mathbf{a}_E .
8. Supondo-se a aceleração linear do ponto E, já conhecida (ou calculada no Item 7 e dada por $\mathbf{a}_E = [a_{ex}, a_{ey}, 0]^T [m/s^2]$, calcule a força atuante na barra DE, sabendo-se que \mathbf{g} é a aceleração gravitacional $[m/s^2]$ e m_E é a massa da partícula E $[kg]$.

Resolução

1. Cálculo do ângulo β_2 em função do ângulo β_1 e dos parâmetros geométricos do mecanismo:

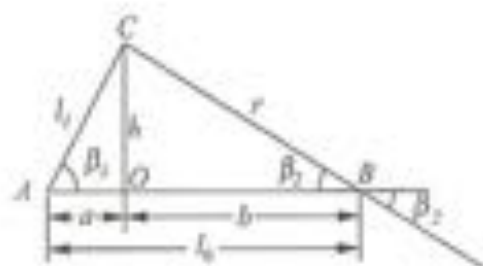


Figura 2.27
Relações trigonométricas para o mecanismo.

□ Triângulo OAC

$$\sin \beta_1 = \frac{h}{l_1} \Rightarrow h = l_1 \sin \beta_1$$

$$\cos \beta_1 = \frac{a}{l_1} \Rightarrow a = l_1 \cos \beta_1$$

□ Triângulo OCB

$$\tan \beta_2 = \frac{h}{b} = \frac{h}{l_0 - a}$$

$$\tan \beta_2 = \frac{l_1 \sin \beta_1}{l_0 - l_1 \cos \beta_1} \Rightarrow \beta_2 = \arctan \left(\frac{l_1 \sin \beta_1}{l_0 - l_1 \cos \beta_1} \right) \quad [\text{rad}]$$

2. Cálculo das matrizes de transformação de coordenadas dos sistemas móveis B_1 , B_2 e B_3 para o inercial I :

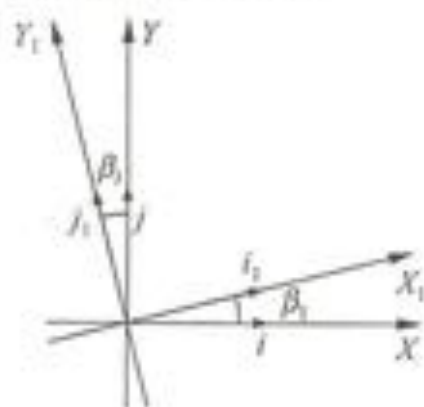


Figura 2.28
Rotação positiva da base B_1 em torno de Z .

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 &= \cos \beta_1 \mathbf{i} + \sin \beta_1 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \\ \mathbf{j}_1 &= -\sin \beta_1 \mathbf{i} + \cos \beta_1 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \\ \mathbf{k}_1 &= 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + 1 \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{k}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & \sin \beta_1 & 0 \\ -\sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix}$$

$${}_{B_1} \mathbf{s} = \mathbf{T}_{\beta_1} {}_I \mathbf{s} \Rightarrow \mathbf{T}_{\beta_1} = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & \sin \beta_1 & 0 \\ -\sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_I \mathbf{s} = \mathbf{T}_{\beta_1}^T {}_{B_1} \mathbf{s} \Rightarrow \mathbf{T}_{\beta_1}^T = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 & 0 \\ \sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

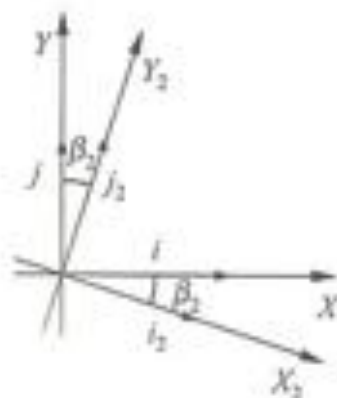


Figura 2.29
Rotação negativa de B_2 em torno de Z .

$$i_2 = \cos \beta_2 i - \sin \beta_2 j + 0 k$$

$$j_2 = \sin \beta_2 i + \cos \beta_2 j + 0 k$$

$$k_2 = 0 i + 0 j + 1 k$$

$$\begin{Bmatrix} i_2 \\ j_2 \\ k_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 & 0 \\ \sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix}$$

$${}_{a_2} s = T_{\beta_2} {}_1 s \Rightarrow T_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 & 0 \\ \sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_1 s = T_{\beta_2}^T {}_{a_2} s \Rightarrow T_{\beta_2}^T = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & \sin \beta_2 & 0 \\ -\sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

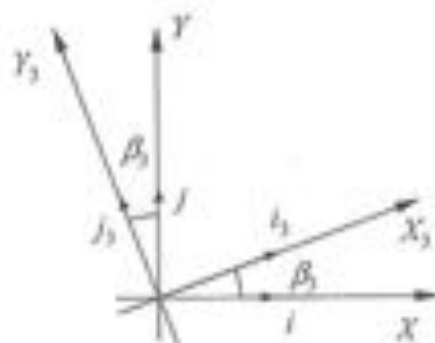


Figura 2.30
Rotação positiva da base B_3 em torno de Z .

$$i_3 = \cos \beta_3 i + \sin \beta_3 j + 0 k$$

$$j_3 = -\sin \beta_3 i + \cos \beta_3 j + 0 k$$

$$k_3 = 0 i + 0 j + 1 k$$

$$\begin{Bmatrix} i_3 \\ j_3 \\ k_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_3 & \sin \beta_3 & 0 \\ -\sin \beta_3 & \cos \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix}$$

$${}_{a_3} s = T_{\beta_3} {}_1 s \Rightarrow T_{\beta_3} = \begin{bmatrix} \cos \beta_3 & \sin \beta_3 & 0 \\ -\sin \beta_3 & \cos \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_1\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\beta_1}^T {}_{A3}\mathbf{s} \Rightarrow \mathbf{T}_{\beta_1}^T = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 & 0 \\ \sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Grandezas descritas vetorialmente

Velocidade e aceleração angulares dos sistemas móveis de referência:

- Sistema móvel B1 – movimentos conhecidos

$${}_1\dot{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_1 \end{bmatrix} [\text{rad}/s] \quad {}_1\ddot{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{rad}/s^2] \quad \text{pois } \dot{\beta}_1 = \text{cte.}$$

- Sistema móvel B2 – movimentos desconhecidos

$${}_1\dot{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\beta}_2 \end{bmatrix} [\text{rad}/s] \quad {}_1\ddot{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ddot{\beta}_2 \end{bmatrix} [\text{rad}/s^2]$$

- Sistema móvel B3 – movimentos desconhecidos

$${}_1\dot{\beta}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix} [\text{rad}/s] \quad {}_1\ddot{\beta}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\beta}_3 \end{bmatrix} [\text{rad}/s^2]$$

Vetores de posição:

$${}_{A1}\mathbf{r}_{AB} = \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_1\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{T}_{\beta_1}^T {}_{A1}\mathbf{r}_{AB} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \beta_1 \\ l_1 \sin \beta_1 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{m}]$$

$${}_{A2}\mathbf{r}_{AC} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{l_0^2 + l_1^2 - 2l_0l_1 \cos \beta_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{m}]$$

$${}_{1B2}\mathbf{r}_{BC} = \mathbf{T}_{\beta_2}^T {}_{A2}\mathbf{r}_{BC} = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & \sin \beta_2 & 0 \\ -\sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_1\mathbf{r}_{BC} = \begin{bmatrix} r \cos \beta_2 \\ -r \sin \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{m}]$$

$${}_{A3}\mathbf{r}_{BD} = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_1\mathbf{r}_{BD} = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & \sin \beta_2 & 0 \\ -\sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 \cos \beta_2 \\ -l_2 \sin \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{m}]$$

$${}_{B1}\mathbf{r}_{DC} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -l_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow {}_I\mathbf{r}_{DC} = \mathbf{T}_{\beta_2}^T {}_{B1}\mathbf{r}_{DC} = \begin{Bmatrix} l_3 \sin \beta_2 \\ -l_3 \cos \beta_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [m]$$

3. Cálculo da velocidade angular absoluta $\dot{\beta}_2$ do corpo 2:

$${}_I\mathbf{v}_C = {}_I\mathbf{v}_B + {}_I\dot{\beta}_2 \times {}_I\mathbf{r}_{BC} + {}_I\mathbf{v}_{rel_{BC}}$$

$${}_I\mathbf{v}_C = 0, \text{ pois o ponto } C \text{ está fixo no sistema inercial!!!}$$

$${}_I\mathbf{v}_B = \underbrace{{}_I\mathbf{v}_A}_{=0} + {}_I\dot{\beta}_1 \times {}_I\mathbf{r}_{AB} + \underbrace{{}_I\mathbf{v}_{rel_{AB}}}_{=0}$$

$${}_I\mathbf{v}_B = {}_I\dot{\beta}_1 \times {}_I\mathbf{r}_{AB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\beta}_1 \\ l_1 \cos \beta_1 & l_1 \sin \beta_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\beta}_1 l_1 \sin \beta_1 \\ \dot{\beta}_1 l_1 \cos \beta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_I\dot{\beta}_2 \times {}_I\mathbf{r}_{BC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\dot{\beta}_2 \\ r \cos \beta_2 & -r \sin \beta_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\beta}_2 r \sin \beta_2 \\ -\dot{\beta}_2 r \cos \beta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_{B1}\mathbf{v}_{rel_{BC}} = \begin{Bmatrix} v_{rel_{BC}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow {}_I\mathbf{v}_{rel_{BC}} = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & \sin \beta_2 & 0 \\ -\sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{rel_{BC}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}_I\mathbf{v}_{rel_{BC}} = \begin{Bmatrix} v_{rel_{BC}} \cos \beta_2 \\ -v_{rel_{BC}} \sin \beta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tem-se, então, que:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\beta}_1 l_1 \sin \beta_1 \\ \dot{\beta}_1 l_1 \cos \beta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\dot{\beta}_2 r \sin \beta_2 \\ -\dot{\beta}_2 r \cos \beta_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_{rel_{BC}} \cos \beta_2 \\ -v_{rel_{BC}} \sin \beta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Reescrevendo de forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} -r \sin \beta_2 & \cos \beta_2 \\ -r \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\beta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\beta}_1 l_1 \sin \beta_1 \\ -\dot{\beta}_1 l_1 \cos \beta_1 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\beta}_2 = \frac{-\dot{\beta}_1 l_1 (\sin \beta_1 \sin \beta_2 - \cos \beta_1 \cos \beta_2)}{r \sin^2 \beta_2 + r \cos^2 \beta_2} = \frac{-\dot{\beta}_1 l_1 \cos(\beta_1 + \beta_2)}{r}$$

$$\dot{\beta}_2 = \frac{-\dot{\beta}_1 l_1 \cos(\beta_1 + \beta_2)}{\sqrt{l_0^2 + l_1^2 - 2l_0 l_1 \cos \beta_1}} \quad [\text{rad/s}]$$

$$v_{\text{Relac}} = \frac{\dot{\beta}_1 l_1 r (\cos \beta_2 \sin \beta_1 + \sin \beta_2 \cos \beta_1)}{r \sin^2 \beta_2 + r \cos^2 \beta_2} = \dot{\beta}_1 l_1 \sin(\beta_1 + \beta_2)$$

4. Cálculo da velocidade linear absoluta do ponto D, representada no sistema inercial:

$${}_I \mathbf{v}_D = {}_I \mathbf{v}_B + {}_I \dot{\beta}_2 \times \mathbf{r}_{BD} + {}_I \mathbf{v}_{\text{Relac}}$$

$${}_I \dot{\beta}_2 \times \mathbf{r}_{BD} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\dot{\beta}_2 \\ l_2 \cos \beta_2 & -l_2 \sin \beta_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\beta}_2 l_2 \sin \beta_2 \\ -\dot{\beta}_2 l_2 \cos \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}_I \mathbf{v}_{\text{Relac}} = 0$$

pois tanto B como D estão solidários ao mesmo sistema móvel de referência, B2, fixo à viga BD.

$${}_I \mathbf{v}_D = \begin{pmatrix} -\dot{\beta}_1 l_1 \sin \beta_1 - \dot{\beta}_2 l_2 \sin \beta_2 \\ \dot{\beta}_1 l_1 \cos \beta_1 - \dot{\beta}_2 l_2 \cos \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\text{m/s}]$$

5. Cálculo da velocidade linear absoluta do ponto E, representada no sistema inercial:

$${}_I \mathbf{v}_E = {}_I \mathbf{v}_D + {}_I \dot{\beta}_3 \times \mathbf{r}_{DE}$$

Resalta-se aqui que β_3 é medido em relação ao sistema inercial I e não em relação ao sistema móvel B2! Caso β_3 fosse medido em relação ao sistema móvel B2, a expressão para a velocidade do ponto E ficaria:

$${}_I \mathbf{v}_E = {}_I \mathbf{v}_D + {}_I \omega_3 \times \mathbf{r}_{DE} = {}_I \mathbf{v}_D + {}_I \dot{\beta}_2 \times \mathbf{r}_{DE} + {}_I \dot{\beta}_3 \times \mathbf{r}_{DE}$$

em que ${}_I \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_2 + \dot{\beta}_3 \end{pmatrix}$ seria a velocidade angular absoluta do sistema de referência móvel B3.

Mas este não é o caso, pois o ângulo β_3 está sendo medido em relação à vertical, ou seja, em relação ao sistema inercial, e

$${}_I \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_3 \end{pmatrix}$$

Calculando-se

$${}_1\dot{\beta}_3 \times {}_1\mathbf{r}_{DE} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\beta}_3 \\ l_3 \sin \beta_3 & -l_3 \cos \beta_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\beta}_3 l_3 \cos \beta_3 \\ \dot{\beta}_3 l_3 \sin \beta_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

chega-se a

$${}_1\mathbf{v}_E = \begin{Bmatrix} -\dot{\beta}_1 l_1 \sin \beta_1 - \dot{\beta}_2 l_2 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_3 l_3 \cos \beta_3 \\ \dot{\beta}_1 l_1 \cos \beta_1 - \dot{\beta}_2 l_2 \cos \beta_2 + \dot{\beta}_3 l_3 \sin \beta_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [\text{m/s}]$$

6. Cálculo da aceleração angular absoluta do corpo 2, $\ddot{\beta}_2$:

Com o auxílio do sistema B1 escreve-se que

$${}_1\mathbf{a}_B = {}_1\mathbf{a}_A + {}_1\dot{\beta}_1 \times {}_1\dot{\beta}_1 \times {}_1\mathbf{r}_{AB} + {}_1\ddot{\beta}_1 \times {}_1\mathbf{r}_{AB} + 2 \cdot {}_1\dot{\beta}_1 \times {}_1\mathbf{v}_{Rel_{AB}} + {}_1\mathbf{a}_{Rel_{AB}}$$

Sabendo-se que ${}_1\mathbf{a}_A = 0$, ${}_1\mathbf{v}_{Rel_{AB}} = 0$ e ${}_1\mathbf{a}_{Rel_{AB}} = 0$ tem-se:

$${}_1\mathbf{a}_B = {}_1\dot{\beta}_1 \times {}_1\dot{\beta}_1 \times {}_1\mathbf{r}_{AB} + {}_1\ddot{\beta}_1 \times {}_1\mathbf{r}_{AB}, \text{ em que } \dot{\beta}_1 = 0$$

$$\Rightarrow {}_1\mathbf{a}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\dot{\beta}_1 \\ -\dot{\beta}_1 l_1 \sin \beta_1 & \dot{\beta}_1 l_1 \cos \beta_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\beta}_1^2 l_1 \cos \beta_1 \\ -\dot{\beta}_1^2 l_1 \sin \beta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Com o auxílio do sistema móvel B2 escreve-se que:

$${}_1\mathbf{a}_C = {}_1\mathbf{a}_B + {}_1\dot{\beta}_2 \times {}_1\dot{\beta}_2 \times {}_1\mathbf{r}_{BC} + {}_1\ddot{\beta}_2 \times {}_1\mathbf{r}_{BC} + 2 \cdot {}_1\dot{\beta}_2 \times {}_1\mathbf{v}_{Rel_{BC}} + {}_1\mathbf{a}_{Rel_{BC}}$$

ou seja

$${}_1\mathbf{a}_B = {}_1\mathbf{a}_C - {}_1\dot{\beta}_2 \times {}_1\dot{\beta}_2 \times {}_1\mathbf{r}_{BC} - {}_1\ddot{\beta}_2 \times {}_1\mathbf{r}_{BC} - 2 \cdot {}_1\dot{\beta}_2 \times {}_1\mathbf{v}_{Rel_{BC}} - {}_1\mathbf{a}_{Rel_{BC}}$$

em que ${}_1\mathbf{a}_C = 0$, pois o ponto C é fixo!!!

$${}_1\dot{\beta}_2 \times {}_1\dot{\beta}_2 \times {}_1\mathbf{r}_{BC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\dot{\beta}_2 \\ -\dot{\beta}_2 r \sin \beta_2 & -\dot{\beta}_2 r \cos \beta_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\beta}_2^2 r \cos \beta_2 \\ +\dot{\beta}_2^2 r \sin \beta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_1\ddot{\beta}_2 \times {}_1\mathbf{r}_{BC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\ddot{\beta}_2 \\ r \cos \beta_2 & -r \sin \beta_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\ddot{\beta}_2 r \sin \beta_2 \\ -\ddot{\beta}_2 r \cos \beta_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$2 \cdot {}_1\ddot{\beta}_2 \times {}_1\mathbf{v}_{Brel_{AC}} = 2 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -\dot{\beta}_2 \\ v_{Brel_{AC}} \cos \beta_2 & -v_{Brel_{AC}} \sin \beta_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2\dot{\beta}_2 v_{Brel_{AC}} \sin \beta_2 \\ -2\dot{\beta}_2 v_{Brel_{AC}} \cos \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}_{B1}\mathbf{a}_{Brel_{AC}} = \begin{bmatrix} a_{Brel_{AC}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_1\mathbf{a}_{Brel_{AC}} = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & \sin \beta_2 & 0 \\ -\sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{Brel_{AC}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$${}_1\mathbf{a}_{Brel_{AC}} = \begin{bmatrix} a_{Brel_{AC}} \cos \beta_2 \\ -a_{Brel_{AC}} \sin \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Igualando-se a velocidade do ponto B calculada com o auxílio do sistema móvel B1 e com o auxílio do sistema móvel B2, pois este ponto pertence tanto ao corpo AB quanto ao corpo BD, chega-se à seguinte igualdade:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\beta}_1^2 l_1 \cos \beta_1 - \dot{\beta}_2^2 r \cos \beta_2 - \dot{\beta}_2 r \sin \beta_2 - 2\dot{\beta}_2 v_{Brel_{AC}} \sin \beta_2 + a_{Brel_{AC}} \cos \beta_2 \\ -\dot{\beta}_1^2 l_1 \sin \beta_1 + \dot{\beta}_2^2 r \sin \beta_2 - \dot{\beta}_2 r \cos \beta_2 - 2\dot{\beta}_2 v_{Brel_{AC}} \cos \beta_2 - a_{Brel_{AC}} \sin \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo-se de forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} -r \sin \beta_2 & \cos \beta_2 \\ -r \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\beta}_2 \\ a_{Brel_{AC}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1^2 l_1 \cos \beta_1 + \dot{\beta}_2^2 r \cos \beta_2 + 2\dot{\beta}_2 v_{Brel_{AC}} \sin \beta_2 \\ \dot{\beta}_1^2 l_1 \sin \beta_1 - \dot{\beta}_2^2 r \sin \beta_2 + 2\dot{\beta}_2 v_{Brel_{AC}} \cos \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\beta}_2 = \frac{-(\dot{\beta}_1^2 l_1 \cos \beta_1 - \dot{\beta}_2^2 r \cos \beta_2 + 2\dot{\beta}_2 v_{Brel_{AC}} \sin \beta_2) \sin \beta_2}{(\sin^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_2) r} -$$

$$\frac{(\dot{\beta}_1^2 l_1 \sin \beta_1 + \dot{\beta}_2^2 r \sin \beta_2 + 2\dot{\beta}_2 v_{Brel_{AC}} \cos \beta_2) \cos \beta_2}{(\sin^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_2) r}$$

$$\ddot{\beta}_2 = [-\dot{\beta}_1^2 l_1 (\cos \beta_1 \sin \beta_1 + \sin \beta_1 \cos \beta_2) - \dot{\beta}_2^2 r (\cos \beta_2 \sin \beta_2 - \cos \beta_2 \sin \beta_2) +$$

$$+ 2\dot{\beta}_2 v_{Brel_{AC}} (\sin^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_2)] / r$$

$$\Rightarrow \ddot{\beta}_2 = -[\dot{\beta}_1^2 l_1 \sin(\beta_1 + \beta_2) + 2\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 l_1 \sin(\beta_1 + \beta_2)] / r$$

$$\ddot{\beta}_2 = \frac{-\dot{\beta}_1 l_1 (\dot{\beta}_1 + 2\dot{\beta}_2) \sin(\beta_1 + \beta_2)}{\sqrt{l_0^2 + l_1^2 - 2l_0 l_1 \cos \beta_1}} \quad [rad / s^2]$$

7. Cálculo da aceleração linear absoluta do ponto E, representada no sistema inercial:

$${}_1\mathbf{a}_E = {}_1\mathbf{a}_D + {}_1\dot{\beta}_3 \times {}_1\dot{\beta}_3 \times {}_1\mathbf{r}_{DE} + {}_1\ddot{\beta}_3 \times {}_1\mathbf{r}_{DE}$$

em que

$${}_1\mathbf{a}_D = {}_1\mathbf{a}_B + {}_1\dot{\beta}_2 \times {}_1\dot{\beta}_2 \times {}_1\mathbf{r}_{BD} + {}_1\ddot{\beta}_2 \times {}_1\mathbf{r}_{BD} + 2 \cdot {}_1\dot{\beta}_2 \times {}_1\mathbf{v}_{rel_{BD}} + {}_1\mathbf{a}_{rel_{BD}}$$

com

$${}_1\mathbf{v}_{rel_{BD}} = 0 \quad e \quad {}_1\mathbf{a}_{rel_{BD}} = 0$$

ou

$${}_1\mathbf{a}_D = {}_1\mathbf{a}_C + {}_1\dot{\beta}_2 \times {}_1\dot{\beta}_2 \times {}_1\mathbf{r}_{CD} + {}_1\ddot{\beta}_2 \times {}_1\mathbf{r}_{CD} + 2 \cdot {}_1\dot{\beta}_2 \times {}_1\mathbf{v}_{rel_{CD}} + {}_1\mathbf{a}_{rel_{CD}}$$

8. Cálculo da força atuante na haste conectada à partícula:

A Figura 2.31 ilustra o diagrama de corpo livre do mecanismo em questão, supondo a força de atrito no ponto C desprezível. Observam-se sete incógnitas (F_{1x} , F_{1y} , F_{2x} , F_{2y} , M_1 , N , T) e oito equações. Para o pêndulo escreve-se que:

$$\sum_{i=1}^7 \mathbf{F}_i = m_E \mathbf{a}_E = {}_1\mathbf{T} + {}_1\mathbf{P}_3$$

$$\begin{Bmatrix} -T \sin \beta_3 \\ T \cos \beta_3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_E g \\ 0 \end{Bmatrix} = m_E \begin{Bmatrix} a_{EX} \\ a_{EY} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

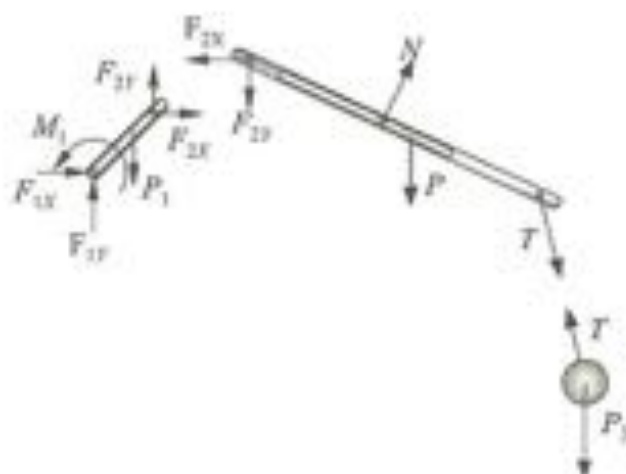


Figura 2.31
Diagrama de Corpo Livre - DCL.

Observa-se, nitidamente, que uma equação pode ser utilizada no cálculo da força T atuante sobre a haste do pêndulo e sobre uma equação livre. Essa equação livre é a equação responsável por descrever a posição do pêndulo em função do tempo. Ao resolvê-la, pode-se calcular as forças de reação atuantes nas outras partes do mecanismo, pois estas dependem dos movimentos realizados pela partícula E.

2.9 Sistema de Múltiplos Corpos Deslizando com Atrito Seco (Equações de Movimento + Reações Dinâmicas)

Exemplo 8

Deseja-se projetar e simular o comportamento dinâmico de um mecanismo para estampar determinadas peças. Deseja-se obter as forças e as equações de movimento dos diferentes componentes da máquina para poder dimensioná-los e observar os diferentes movimentos realizados, entre outros, pelo corpo 4. O mecanismo é mostrado na Figura 2.32, bem como seus sistemas de referência.

Este mecanismo é composto por quatro corpos, sendo o corpo 1 (corpo rígido) um disco acionado por um motor elétrico, o qual gira com velocidade angular $\dot{\psi}_1$ constante, quando um momento M_1 , variável no tempo, atua sobre o mesmo. Um pino guia B é construído no disco, distante r_0 do centro de rotação O. O corpo 2 (corpo rígido) é uma viga com dois rasgos ao longo de seu comprimento, permitindo o deslizamento dos pinos B e C. Esta viga está pivotada em sua extremidade inferior, girando com uma velocidade angular $\dot{\psi}_2$ e uma aceleração angular $\ddot{\psi}_2$ as quais dependem da rotação do disco. O corpo 3 (corpo rígido) é uma haste responsável por impedir os movimentos do corpo 4 na direção horizontal. Assume-se, como primeira aproximação, que os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre os corpos 3 e 4 são μ_s e μ_d . O corpo 4 (partícula) é conectado ao corpo 3 no ponto C, através de uma mola de constante elástica k , e comprimento inicial y_0 .

Conhecendo-se as dimensões do mecanismo e definindo-se quatro sistemas de referência, ou seja,

- I – sistema inercial X, Y, Z representado pelos versores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (origem O).
- B1 – sistema móvel solidário ao disco X_1, Y_1, Z_1 e representado pelo versores $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ (origem O).
- B2 – sistema móvel solidário à viga X_2, Y_2, Z_2 e representado pelos versores $\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2$ (origem A).
- B3 – Sistema móvel solidário à haste X_3, Y_3, Z_3 representado pelos versores $\mathbf{i}_3, \mathbf{j}_3, \mathbf{k}_3$ (origem C).

Podem-se:

1. As matrizes de transformação de coordenadas entre os sistemas I e B1, I e B2, I e B3.
2. Determinar o ângulo ψ_2 em função do ângulo de acionamento ψ_1 e das dimensões do mecanismo.
3. Determinar a velocidade angular absoluta do corpo 2 ($\dot{\psi}_2$) em função dos parâmetros do mecanismo.
4. Determinar a aceleração angular absoluta do corpo 2 ($\ddot{\psi}_2$) em função dos parâmetros do mecanismo.
5. Determinar a velocidade linear absoluta do ponto C.

$$\mathbf{T}_{\psi_1} = \begin{bmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & 0 \\ -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_{B1}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\psi_1} {}_I\mathbf{s}$$

$$\mathbf{T}_{\psi_2} = \begin{bmatrix} \cos \psi_2 & \sin \psi_2 & 0 \\ -\sin \psi_2 & \cos \psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_{B2}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\psi_2} {}_I\mathbf{s}$$

Portanto, ψ_1 assume valores negativos quando na posição mostrada na Figura 2.33.

$$\mathbf{T}_{\psi_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_{B1}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\psi_1} {}_I\mathbf{s}$$

2. Relação entre o ângulo de acionamento (ψ_1) e acionado (ψ_2).

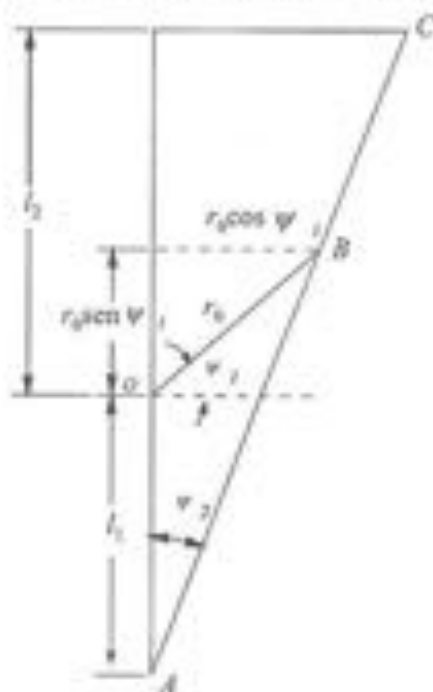


Figura 2.33
Relação entre ψ_1 e ψ_2 .

Através do diagrama da Figura 2.33, pode-se escrever o ângulo acionado (ψ_2) em função do ângulo de acionamento (ψ_1), bem como os módulos dos vetores \mathbf{r}_{AB} e \mathbf{r}_{AC} :

$$\psi_2 = \arctan \left(\frac{r_0 \cos \psi_1}{l_1 + r_0 \sin \psi_1} \right)$$

$$|\mathbf{r}_{AB}| = \sqrt{r_0^2 + l_1^2 + 2r_0 l_1 \sin \psi_1} = \bar{r}$$

$$|r_{AC}| = \left(\frac{l_1 + l_2}{\cos \psi_2} \right) = \bar{r}$$

3. Com base no fato de que a velocidade absoluta de um mesmo ponto, calculada com auxílio de diferentes sistemas móveis, tem de ser igual quando representada em uma base comum, por exemplo a inercial, igualam-se essas expressões e determinam-se os parâmetros desconhecidos, no caso $\dot{\psi}_2$. Deste modo, com auxílio do sistema B1 escreve-se:

$${}_1\mathbf{v}_B = \underset{=0}{\mathbf{v}_O} + {}_1\dot{\psi}_1 \times {}_1\mathbf{r}_{OB} + \underset{=0}{\mathbf{v}_{rel}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\psi}_1 \\ -r_0 \sin \psi_1 & r_0 \cos \psi_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}_1 r_0 \cos \psi_1 \\ -\dot{\psi}_1 r_0 \sin \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com o auxílio do sistema de referência B2 escreve-se:

$${}_1\mathbf{v}_B = \underset{=0}{\mathbf{v}_A} + {}_1\dot{\psi}_2 \times {}_1\mathbf{r}_{AB} + {}_1\mathbf{v}_{rel} \quad \text{em que } \Rightarrow {}_{B2}\mathbf{v}_{rel} = \begin{bmatrix} \bar{v} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\psi}_2 \\ -\bar{r} \cos \psi_2 & -\bar{r} \sin \psi_2 & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v} \cos \psi_2 \\ \bar{v} \sin \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_2 \bar{r} \sin \psi_2 + \bar{v} \cos \psi_2 \\ -\dot{\psi}_2 \bar{r} \cos \psi_2 + \bar{v} \sin \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Igualando-se as expressões para a velocidade do ponto B, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -\dot{\psi}_1 r_0 \cos \psi_1 \\ -\dot{\psi}_1 r_0 \sin \psi_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_2 \bar{r} \sin \psi_2 + \bar{v} \cos \psi_2 \\ -\dot{\psi}_2 \bar{r} \cos \psi_2 + \bar{v} \sin \psi_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo-se a igualdade, separando-se as incógnitas do problema em um vetor, $\dot{\psi}_2$ e \bar{v} , tem-se:

$$\begin{bmatrix} \bar{r} \sin \psi_2 & \cos \psi_2 \\ -\bar{r} \cos \psi_2 & \sin \psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi}_2 \\ \bar{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}_1 r_0 \cos \psi_1 \\ -\dot{\psi}_1 r_0 \sin \psi_1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo-se o sistema de equações por Cramer:

$$\dot{\psi}_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\dot{\psi}_1 r_0 \cos \psi_1 & \cos \psi_2 \\ -\dot{\psi}_1 r_0 \sin \psi_1 & \sin \psi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{r} \sin \psi_2 & \cos \psi_2 \\ -\bar{r} \cos \psi_2 & \sin \psi_2 \end{vmatrix}} = \frac{-\dot{\psi}_1 r_0 \sin(\psi_1 - \psi_2)}{\bar{r}}$$

$$\bar{v} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{r} \sin \psi_2 & -\dot{\psi}_1 r_0 \cos \psi_1 \\ -\bar{r} \cos \psi_2 & -\dot{\psi}_1 r_0 \sin \psi_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{r} \sin \psi_2 & \cos \psi_2 \\ -\bar{r} \cos \psi_2 & \sin \psi_2 \end{vmatrix}} = -\dot{\psi}_1 r_0 \cos(\psi_1 - \psi_2)$$

em que \bar{r} e ψ_2 são dados no Item 2.

4. Com base no fato de que a aceleração absoluta de um mesmo ponto, calculada com auxílio de diferentes sistemas móveis, tem de ser igual quando representada em uma base comum, por exemplo a inercial, igualam-se essas expressões e determinam-se os parâmetros desconhecidos, no caso $\ddot{\psi}_2$. Desse modo, com auxílio do sistema B1 escreve-se:

$${}_I \mathbf{a}_B = \underbrace{{}_I \mathbf{a}_O}_{=0} + \underbrace{{}_I \dot{\psi}_1 \times}_0 \underbrace{{}_I \dot{\psi}_1 \times}_0 \underbrace{{}_I \mathbf{r}_{OB}}_{=0} + \underbrace{{}_I \ddot{\psi}_1 \times}_0 \underbrace{{}_I \mathbf{r}_{OB}}_{=0} + 2 \underbrace{{}_I \dot{\psi}_1 \times}_0 \underbrace{{}_I \mathbf{v}_{Rel}}_{=0} + \underbrace{{}_I \mathbf{a}_{Rel}}_{=0}$$

$${}_I \mathbf{a}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\psi}_1 \\ -\dot{\psi}_1 r_0 \cos \psi_1 & -\dot{\psi}_1 r_0 \sin \psi_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}_1^2 r_0 \sin \psi_1 \\ -\dot{\psi}_1^2 r_0 \cos \psi_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

Com o auxílio do sistema de referência B2, escreve-se:

$${}_I \mathbf{a}_B = \underbrace{{}_I \mathbf{a}_A}_{=0} + \underbrace{{}_I \dot{\psi}_2 \times}_0 \underbrace{{}_I \dot{\psi}_2 \times}_0 \underbrace{{}_I \mathbf{r}_{AB}}_{=0} + \underbrace{{}_I \ddot{\psi}_2 \times}_0 \underbrace{{}_I \mathbf{r}_{AB}}_{=0} + 2 \cdot \underbrace{{}_I \dot{\psi}_2 \times}_0 \underbrace{{}_I \mathbf{v}_{Rel}}_{=0} + \underbrace{{}_I \mathbf{a}_{Rel}}_{=0} \quad (2.32)$$

Calculando-se os quatro termos restantes da Equação 2.32 separadamente, tem-se:

$${}_I \dot{\psi}_2 \times \underbrace{{}_I \dot{\psi}_2 \times}_0 \underbrace{{}_I \mathbf{r}_{AB}}_{=0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_2 \bar{r} \sin \psi_2 & -\dot{\psi}_2 \bar{r} \cos \psi_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}_2^2 \bar{r} \cos \psi_2 \\ \dot{\psi}_2^2 \bar{r} \sin \psi_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_I \ddot{\psi}_2 \times \underbrace{{}_I \mathbf{r}_{AB}}_{=0} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \ddot{\psi}_2 \\ -\bar{r} \cos \psi_2 & -\bar{r} \sin \psi_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{\psi}_2 \bar{r} \sin \psi_2 \\ -\ddot{\psi}_2 \bar{r} \cos \psi_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$2 \cdot \underbrace{{}_I \dot{\psi}_2 \times}_0 \underbrace{{}_I \mathbf{v}_{Rel}}_{=0} = 2 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\psi}_2 \\ \bar{v} \cos \psi_2 & \bar{v} \sin \psi_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -2\bar{v} \dot{\psi}_2 \sin \psi_2 \\ 2\bar{v} \dot{\psi}_2 \cos \psi_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_B \mathbf{a}_{Rel} = \begin{Bmatrix} \bar{a} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underbrace{{}_I \mathbf{a}_{Rel}}_{=0} = \mathbf{T}_{B \rightarrow I}^T \underbrace{{}_B \mathbf{a}_{Rel}}_{=0} \Rightarrow \underbrace{{}_I \mathbf{a}_{Rel}}_{=0} = \begin{Bmatrix} \bar{a} \cos \psi_2 \\ \bar{a} \sin \psi_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Desse modo, tem-se que a aceleração do ponto B é dada por:

$${}_{1}\mathbf{a}_B = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}_2^2 \bar{r} \cos \psi_2 + \ddot{\psi}_2 \bar{r} \sin \psi_2 - 2\bar{v} \dot{\psi}_2 \sin \psi_2 + \bar{a} \cos \psi_2 \\ \dot{\psi}_2^2 \bar{r} \sin \psi_2 - \ddot{\psi}_2 \bar{r} \cos \psi_2 + 2\bar{v} \dot{\psi}_2 \cos \psi_2 + \bar{a} \sin \psi_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Igualando-se as Equações 2.31 e 2.33, pois estas representam a aceleração do mesmo ponto (condição de vínculo), e reescrevendo-se esta igualdade de forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \bar{r} \sin \psi_2 & \cos \psi_2 \\ \bar{r} \cos \psi_2 & \sin \psi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\psi}_2 \\ \bar{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}_1^2 r_0 \sin \psi_1 - \dot{\psi}_2^2 \bar{r} \cos \psi_2 + 2\bar{v} \dot{\psi}_2 \sin \psi_2 \\ -\dot{\psi}_1^2 r_0 \cos \psi_1 - \dot{\psi}_2^2 \bar{r} \sin \psi_2 + 2\bar{v} \dot{\psi}_2 \cos \psi_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo-se este sistema de duas equações por Cramer, obtém-se:

$$\ddot{\psi}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (\dot{\psi}_1^2 r_0 \sin \psi_1 - \dot{\psi}_2^2 \bar{r} \cos \psi_2 + 2\bar{v} \dot{\psi}_2 \sin \psi_2) & \cos \psi_2 \\ (\dot{\psi}_1^2 r_0 \cos \psi_1 - \dot{\psi}_2^2 \bar{r} \sin \psi_2 - 2\bar{v} \dot{\psi}_2 \cos \psi_2) & \sin \psi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{r} \sin \psi_2 & \cos \psi_2 \\ -\bar{r} \cos \psi_2 & \sin \psi_2 \end{vmatrix}}$$

$$\ddot{\psi}_2 = \frac{\dot{\psi}_1^2 r_0 \cos(\psi_1 - \psi_2) + 2\bar{v} \dot{\psi}_2}{\bar{r}}$$

em que \bar{r} , \bar{v} , ψ_2 e $\dot{\psi}_2$ são dados nos itens 2 e 3.

5. Novamente, fazendo-se uso da idéia de que a velocidade absoluta de um mesmo ponto pode ser calculada com o auxílio de diferentes sistemas de referência, pode-se escrever com auxílio do sistema 1 ou B3 que a velocidade do ponto C tem apenas uma componente na direção Y ou Y_3 :

$${}_{B3}\mathbf{v}_C = {}_1\mathbf{v}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_C \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

Com o auxílio do sistema móvel B2, escreve-se que:

$${}_1\mathbf{v}_C = \underset{=0}{\underset{=0}{}} \mathbf{v}_A + \dot{\psi}_2 \times {}_1\mathbf{r}_{AC} + {}_1\mathbf{v}_{rel}$$

Calculando-se os dois termos restantes desta equação, como segue:

$$\dot{\psi}_2 \times {}_1\mathbf{r}_{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\psi}_2 \\ -(l_1 + l_2) & -(l_1 + l_2) \tan \psi_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}_2 (l_1 + l_2) \tan \psi_2 \\ -\dot{\psi}_2 (l_1 + l_2) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_{B2}\mathbf{v}_{Rel} = \begin{Bmatrix} \bar{v} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow {}_I\mathbf{v}_{Rel} = \mathbf{T}_{\psi_2}^T {}_{B2}\mathbf{v}_{Rel} = \begin{Bmatrix} \bar{v} \cos \psi_2 \\ \bar{v} \sin \psi_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

obtem-se a velocidade absoluta do ponto C:

$${}_I\mathbf{v}_C = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}_2(l_1 + l_2) \tan \psi_2 + \bar{v} \cos \psi_2 \\ -\dot{\psi}_2(l_1 + l_2) + \bar{v} \sin \psi_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Igualando-se as Equações 2.34 e 2.35, as quais representam a velocidade absoluta do mesmo ponto, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\cos \psi_2 \\ 1 & -\sin \psi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ \bar{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_2(l_1 + l_2) \tan \psi_2 \\ -\dot{\psi}_2(l_1 + l_2) \end{bmatrix}$$

Resolvendo-se o sistema de duas equações por Cramer, tem-se:

$$v_C = \frac{\begin{vmatrix} \dot{\psi}_2(l_1 + l_2) \tan \psi_2 & -\cos \psi_2 \\ -\dot{\psi}_2(l_1 + l_2) & -\sin \psi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -\cos \psi_2 \\ 1 & -\sin \psi_2 \end{vmatrix}} = \frac{-2\dot{\psi}_2(l_1 + l_2)}{\cos^2 \psi_2}$$

$$\bar{v} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \dot{\psi}_2(l_1 + l_2) \tan \psi_2 \\ 1 & -\dot{\psi}_2(l_1 + l_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -\cos \psi_2 \\ 1 & -\sin \psi_2 \end{vmatrix}} = \frac{-\dot{\psi}_2(l_1 + l_2) \sin \psi_2}{\cos^2 \psi_2}$$

6. Da mesma forma como se fez para a velocidade absoluta do ponto C, faz-se para a aceleração absoluta. Novamente conhece-se a direção da aceleração, pois o ponto C somente pode deslizar na vertical, ou seja, na direção Y_3 ou Y .

Com o auxílio do sistema móvel B3 escreve-se:

$${}_{B3}\mathbf{a}_C = {}_I\mathbf{a}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ a_C \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

Com o auxílio do sistema móvel B2 escreve-se que:

$${}_I\mathbf{a}_C = \underbrace{{}_I\mathbf{a}_A}_{=0} + \dot{\psi}_2 \times \dot{\psi}_2 \times {}_I\mathbf{r}_{AC} + \ddot{\psi}_2 \times {}_I\mathbf{r}_{AC} + 2\dot{\psi}_2 \times {}_I\mathbf{v}_{Rel} + {}_I\mathbf{a}_{Rel} \quad (2.37)$$

Calculando-se os quatro termos restantes da Equação 2.37 separadamente, tem-se:

$$\begin{aligned}
 {}_1\dot{\psi}_2 \times {}_1\dot{\psi}_2 \times {}_1\mathbf{r}_{AC} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_2(l_1+l_2)\tan\psi_2 & -\dot{\psi}_2(l_1+l_2) & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}_2^2(l_1+l_2) \\ \dot{\psi}_2^2(l_1+l_2)\tan\psi_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 {}_1\ddot{\psi}_2 \times {}_1\mathbf{r}_{AC} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \ddot{\psi}_2 \\ -(l_1+l_2) & -(l_1+l_2)\tan\psi_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{\psi}_2(l_1+l_2)\tan\psi_2 \\ -\ddot{\psi}_2(l_1+l_2) \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 2{}_1\dot{\psi}_2 \times {}_1\mathbf{v}_{Rel} &= 2 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \dot{\psi}_2 \\ \bar{v}\cos\psi_2 & \bar{v}\sin\psi_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -2\dot{\psi}_2\bar{v}\sin\psi_2 \\ 2\dot{\psi}_2\bar{v}\cos\psi_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 {}_1\mathbf{a}_{Rel} &= \mathbf{T}_{\psi_2}^T {}_B3\mathbf{a}_{Rel} = \begin{Bmatrix} \bar{a}\cos\psi_2 \\ \bar{a}\sin\psi_2 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Deste modo, tem-se que a aceleração absoluta do ponto C é dada por:

$${}_1\mathbf{a}_C = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}_2^2(l_1+l_2) + \ddot{\psi}_2(l_1+l_2)\tan\psi_2 - 2\dot{\psi}_2\bar{v}\sin\psi_2 + \bar{a}\cos\psi_2 \\ \dot{\psi}_2^2(l_1+l_2)\tan\psi_2 - \ddot{\psi}_2(l_1+l_2) + 2\dot{\psi}_2\bar{v}\cos\psi_2 + \bar{a}\sin\psi_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

Igualando-se as Equações 2.36 e 2.38, pois representam a aceleração absoluta do mesmo ponto, e reescrevendo a igualdade de forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\cos\psi_2 \\ 1 & -\sin\psi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_C \\ \bar{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}_2^2(l_1+l_2) + \ddot{\psi}_2(l_1+l_2)\tan\psi_2 - 2\dot{\psi}_2\bar{v}\sin\psi_2 \\ \dot{\psi}_2^2(l_1+l_2)\tan\psi_2 - \ddot{\psi}_2(l_1+l_2) + 2\dot{\psi}_2\bar{v}\cos\psi_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo-se o sistema de equações por Cramer, obtém-se a aceleração do ponto C:

$$a_C = \frac{\begin{vmatrix} (\dot{\psi}_2^2(l_1+l_2) + \ddot{\psi}_2(l_1+l_2)\tan\psi_2 - 2\dot{\psi}_2\bar{v}\sin\psi_2) & -\cos\psi_2 \\ (\dot{\psi}_2^2(l_1+l_2)\tan\psi_2 - \ddot{\psi}_2(l_1+l_2) + 2\dot{\psi}_2\bar{v}\cos\psi_2) & -\sin\psi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -\cos\psi_2 \\ 1 & -\sin\psi_2 \end{vmatrix}}$$

$$a_C = \frac{-\ddot{\psi}_2(l_1+l_2) + 2\dot{\psi}_2\bar{v}\cos\psi_2}{\cos^2\psi_2}$$

7. A aceleração do ponto D é facilmente descrita com o auxílio do sistema móvel B3, fazendo-se uso do fato de a base móvel somente transladar.

$$\begin{aligned}
 {}_1\mathbf{a}_D &= {}_1\mathbf{a}_C + \underbrace{{}_1\dot{\omega} \times {}_1\dot{\omega} \times \mathbf{r}_{CD} + {}_1\dot{\omega} \times \mathbf{r}_{CD}}_{\omega=\dot{\omega}=0 \text{ translação pura}} + 2\dot{\omega} \mathbf{v}_{Rel} + {}_1\mathbf{a}_{Rel} \Rightarrow \\
 {}_1\mathbf{a}_D &= {}_1\mathbf{a}_C + {}_1\mathbf{a}_{Rel} = \begin{Bmatrix} 0 \\ a_C + \ddot{y}_D \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{-\ddot{\psi}_1(l_1 + l_2) + 2\ddot{\psi}_1 \dot{u} \cos \psi_1}{\cos^3 \psi_1} + \ddot{y}_D \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

em que a_C é dada no item anterior e \ddot{y}_D é aceleração relativa da partícula (corpo 4) em relação ao ponto C medida no sistema de referência B3.

8. O diagrama de corpo livre da Figura 2.34 ilustra as forças e momento atuantes sobre cada um dos corpos que constituem o mecanismo. Assume-se aqui que as forças de atrito nos pontos B e C são negligenciáveis.

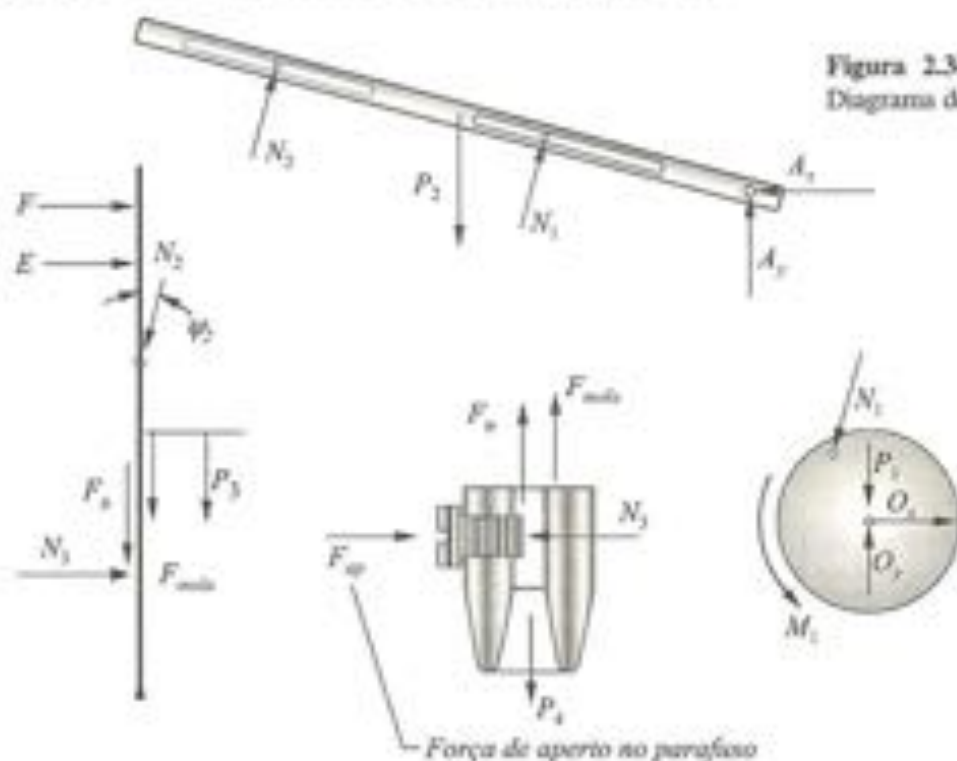


Figura 2.34
Diagrama de corpo livre.

Deste diagrama de corpo livre pode-se detectar dez incógnitas (M_1 , O_1 , O_2 , N_1 , A_x , A_y , N_2 , E , F , N_3). Como se têm 3 corpos rígidos e 1 partícula, há 11 equações disponíveis ($3 \times 3 + 1 \times 2 = 11$). Logo, chega-se a uma equação livre.

9. Fazendo-se a somatória de forças atuantes sobre a partícula 4 e igualando-a à variação da quantidade de movimento linear da mesma, chega-se a:

$$\sum_{i=1}^4 {}_iF_i = {}_1P + {}_1F_m + {}_1F_m + {}_1N_3 + {}_1F_{aperto} = \frac{d}{dt}(m_4 \mathbf{v}_D) = m_4 {}_1\mathbf{a}_D$$

Com base no diagrama de corpo livre e na Equação 2.39, escreve-se que

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -m_4 g \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -k(y_D - y_o) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\text{sign}(\dot{y}_D) \mu_{\text{din}} N_3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_3 + F_{\text{ap}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = m_4 \begin{Bmatrix} 0 \\ a_C + \ddot{y}_D \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Deste sistema tira-se a equação de movimento isolando-se \ddot{y}_D . Ressalta-se, aqui, que a direção da força de atrito dependerá da velocidade do ponto D. Caso esta seja positiva, a força de atrito será negativa e vice-versa, ou seja, a força de atrito terá sempre sinal contrário ao da velocidade \dot{y}_D . Isto caracteriza a não linearidade da equação de movimento:

$$\ddot{y}_D = -\text{sign}(\dot{y}_D) \frac{\mu_{\text{din}}}{m_4} N_3 - \frac{k}{m_4} y_D - g - \frac{-\dot{\psi}_2(l_1 + l_2) + 2\dot{\psi}_2 \bar{v} \cos \psi_2}{\cos^2 \psi_2} + \frac{k}{m_4} y_o$$

Ressalta-se aqui que as forças de atrito nos pontos B e C poderiam ser incluídas na modelagem, da mesma forma como foi feito com a força de atrito entre os corpos 3 e 4. No caso, estas forças poderiam ser descritas por $F\mu_B = -\text{sign}(v) \cdot \mu_{\text{din}} \cdot N_1$ e $F\mu_C = -\text{sign}(v) \cdot \mu_{\text{din}} \cdot N_2$. Subentende-se aqui, ao se utilizar o coeficiente de atrito dinâmico μ_{din} que a força de atrito entre os corpos 3 e 4 é maior que $\mu_{\text{st}} \cdot N_3$, e que o deslizamento acontece. Caso $F\mu_D \leq \mu_{\text{st}} \cdot N_3$, então $\ddot{y}_D = 0$, e a incógnita do problema passa a ser a reação entre os corpos 3 e 4, pois não existiria movimento relativo entre os corpos.

2.10 Corpo Rígido no Espaço e Ângulos de Euler (Equações de Movimento + Reações Dinâmicas)

Exemplo 9

O objetivo fundamental deste exemplo é a ilustração da aplicação dos ângulos de Euler na modelagem do comportamento dinâmico de um corpo rígido: o pião. Neste exemplo, definem-se os ângulos de precessão, nutação e spin nos respectivos sistemas móveis, chegando-se às velocidades angulares do sistema móvel solidário ao pião e à velocidade angular absoluta do pião. Obtendo-se a quantidade de movimento angular do pião no sistema móvel de referência, deriva-se a mesma para igualá-la à soma dos momentos externos aplicados sobre o pião. Faz-se, também, a somatória das forças externas aplicadas sobre o pião, igualando-se esta à variação da quantidade de movimento linear. Chega-se, desta forma, às equações não lineares de movimentos e às forças de reação atuantes no ponto de contato do pião com o chão. Para finalizar a análise, escreve-se um programa computacional para a integração das equações de movimento, supondo-se que o pião não deslize sobre a superfície, e ilustram-se alguns resultados numéricos obtidos para a descrição dos movimentos do pião, em função das condições iniciais do movimento.

Etapas para a solução do problema:

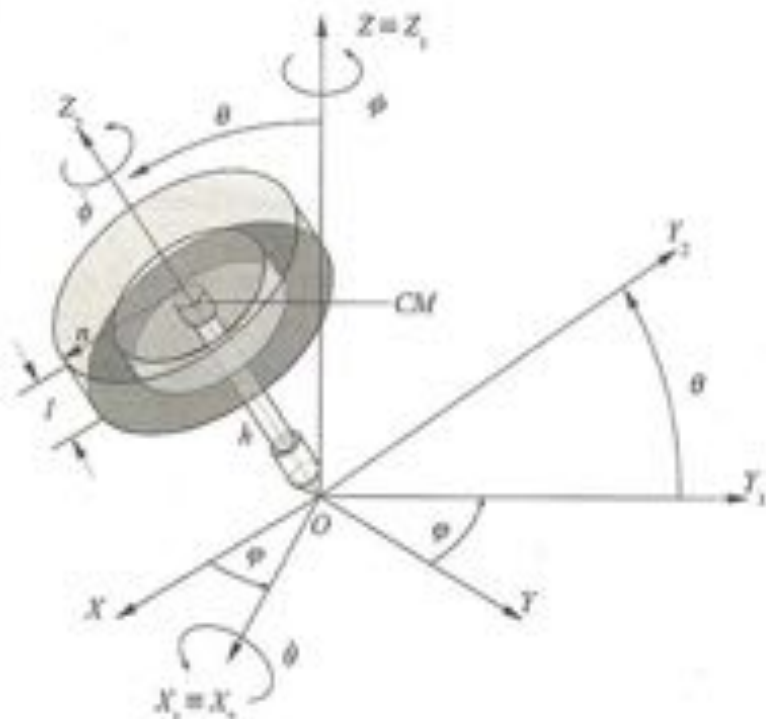
CINEMÁTICA

1. *Definição dos sistemas de referência (móveis e inercial).*
2. *Cálculo das matrizes de transformação de coordenadas.*
3. *Cálculo de velocidade angular absoluta do sistema móvel, Ω .*
4. *Cálculo da velocidade angular absoluta do corpo, ω .*
5. *Cálculo da aceleração angular absoluta do corpo, $\dot{\omega}$.*
6. *Cálculo da velocidade linear absoluta do centro de massa do corpo, v^* .*
7. *Cálculo da aceleração linear absoluta do centro de massa do corpo, a^* .*



Figura 2.35

Pião – sistema físico e modelo mecânico com a ilustração dos sistemas de referência inercial e móveis. h é a distância entre o ponto O e o centro de massa CM do pião; r e l são as dimensões do disco do pião: r é o raio e l a espessura.



DINÂMICA

8. *Diagrama de corpo livre.*
9. *Cálculo dos momentos de inércia de massa, I .*
10. *Equilíbrio dinâmico [Newton-Euler].*
11. *Programa computacional em PASCAL para a integração das equações de movimento.*
12. *Resultados teóricos para diferentes condições iniciais de movimento.*
13. *Levantamento das equações de movimento e das reações dinâmicas utilizando o programa МАТЕМАТИКА (manipulação simbólica).*

Resolução**1. Sistemas de referência (veja animações no CD-ROM):**

- Sistema inercial $I - X, Y, Z$ representada por $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (origem no ponto O).
- Sistema móvel $B1 - X_1, Y_1, Z_1$ representada por $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ (origem no ponto O).
- Sistema móvel $B2 - X_2, Y_2, Z_2$ representada por $\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2$ (origem no ponto O).

2. Matrizes de transformação de coordenadas:

- $\dot{\varphi}$ – rotação na base inercial em torno de Z .
- $\dot{\theta}$ – rotação na base $B1$ em torno de X_1 .
- $\dot{\phi}$ – rotação na base $B2$ em torno de Z_2 .

$$\mathbf{T}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_{B1}\mathbf{s} = \mathbf{T}_\varphi {}_I\mathbf{s}$$

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \Rightarrow {}_{B2}\mathbf{s} = \mathbf{T}_\theta {}_{B1}\mathbf{s}$$

$$\mathbf{T}_\theta \cdot \mathbf{T}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{bmatrix} \Rightarrow {}_{B2}\mathbf{s} = \mathbf{T}_\theta \cdot \mathbf{T}_\varphi {}_I\mathbf{s}$$

3. Velocidade angular absoluta Ω do sistema de referência representada com auxílio da base (ou sistema) móvel $B2$, na qual a somatória de momentos será realizada e na qual o tensor de inércia permanece constante:

$${}_{B2}\Omega = {}_{B2}\dot{\varphi} + {}_{B2}\dot{\theta}$$

$${}_I\dot{\varphi} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} \Rightarrow {}_{B2}\dot{\varphi} = \mathbf{T}_\theta \cdot \mathbf{T}_\varphi {}_I\dot{\varphi}$$

$${}_{B1}\dot{\theta} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow {}_{B2}\dot{\theta} = \mathbf{T}_\theta {}_{B1}\dot{\theta}$$

$${}_{B2}\dot{\phi} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix}$$

$${}_{B2}\Omega = {}_{B2}\dot{\phi} + {}_{B2}\dot{\theta} = \mathbf{T}_{\theta} \cdot \mathbf{T}_{\phi} \dot{\phi} + \mathbf{T}_{\theta} {}_{B1}\dot{\theta} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{Bmatrix} //$$

4. Velocidade angular absoluta ω do pião representada na base móvel $B2$, na qual a somatória de momentos será realizada e na qual o tensor de inércia permanece constante:

$${}_{B2}\omega = {}_{B2}\dot{\phi} + {}_{B2}\dot{\theta} + {}_{B2}\dot{\phi}$$

$${}_{B2}\omega = {}_{B2}\dot{\phi} + {}_{B2}\dot{\theta} + {}_{B2}\dot{\phi} = \mathbf{T}_{\theta} \cdot \mathbf{T}_{\phi} \dot{\phi} + \mathbf{T}_{\theta} {}_{B1}\dot{\theta} + {}_{B2}\dot{\phi} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{Bmatrix}$$

5. Aceleração angular absoluta do corpo:

$${}_{B2}\dot{\omega} = \frac{d}{dt}({}_{B2}\omega) + {}_{B2}\Omega \times {}_{B2}\omega$$

$$\frac{d}{dt}({}_{B2}\omega) = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\phi} \end{Bmatrix}$$

$${}_{B2}\Omega \times {}_{B2}\omega = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ \dot{\theta} & \dot{\phi} \sin \theta & \dot{\phi} \cos \theta \\ \dot{\theta} & \dot{\phi} \sin \theta & \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \dot{\phi} \sin \theta \\ -\dot{\theta} \dot{\phi} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_{B2}\dot{\omega} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} + \dot{\phi} \dot{\phi} \sin \theta \\ \ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\phi} \end{Bmatrix}$$

6. Velocidade linear absoluta do centro de massa, supondo que o pião não deslize em O :

$${}_{B2}\mathbf{v}^* = \underbrace{{}_{B2}\mathbf{v}_O}_{=0} + {}_{B2}\Omega \times {}_{B2}\mathbf{r}^* + \underbrace{{}_{B2}\mathbf{v}_{rel}}_{=0}$$

$${}_{S2}\Omega \times {}_{S2}\mathbf{r}^* = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ \dot{\theta} & \dot{\varphi} \sin \theta & \dot{\varphi} \cos \theta \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} h\dot{\varphi} \sin \theta \\ -h\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_{S2}\mathbf{v}^* = h \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \sin \theta \\ -\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

7. *Aceleração linear absoluta do centro de massa, supondo que o pino não deslize em O:*

$${}_{S2}\mathbf{a}^* = \underbrace{{}_{S2}\mathbf{a}_O}_{=0} + {}_{S2}\Omega \times {}_{S2}\Omega \times {}_{S2}\mathbf{r}^* + {}_{S2}\dot{\Omega} \times {}_{S2}\mathbf{r}^* + \underbrace{2\Omega \times \mathbf{v}_{rel}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{a}_{rel}}_{=0}$$

$${}_{S2}\Omega \times {}_{S2}\Omega \times {}_{S2}\mathbf{r}^* = \begin{Bmatrix} h\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta \\ h\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta \\ -h\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - h\dot{\theta}^2 \end{Bmatrix}$$

$${}_{S2}\dot{\Omega} \times {}_{S2}\mathbf{r}^* = \begin{Bmatrix} h\ddot{\varphi} \sin \theta + h\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta \\ -h\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_{S2}\mathbf{a}^* = h \begin{Bmatrix} 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta + \ddot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta - \ddot{\theta} \\ -\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - \dot{\theta}^2 \end{Bmatrix}$$

8. *Diagrama de corpo livre:*

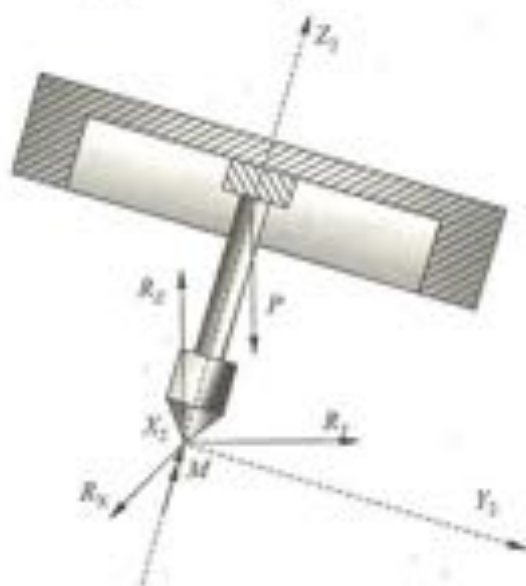


Figura 2.36

Diagrama de corpo livre – força peso, forças de reação no ponto de apoio e momento de perdas, por exemplo, por atrito entre pino e superfície.

As forças externas atuantes sobre o pião são:

- A força peso ${}_{\mathcal{P}}$, a qual representada na base inercial vale:

$${}_{\mathcal{P}}\mathbf{P} = [0 \ 0 \ -mg]^T$$

- A força de reação ${}_{\mathcal{R}}$, a qual representada na base inercial vale:

$${}_{\mathcal{R}}\mathbf{R} = [R_x \ R_y \ R_z]^T$$

O momento de perdas ${}_{\mathcal{M}}\mathbf{M} = [0 \ 0 \ M]^T$ é descrito no sistema móvel $B2$, na direção Z_2 , pois influenciará diretamente o "spin" do pião.

Caso estas forças precisem ser representadas em uma outra base, basta utilizar as matrizes de transformação de coordenadas, definidas anteriormente.

9. Momentos de inércia de massa:

- Momentos de inércia de massa em relação ao centro de massa:

$$\mathbf{I}_{CM} = \begin{bmatrix} {}_{CM}I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & {}_{CM}I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & {}_{CM}I_{zz} \end{bmatrix}, \text{ em que } \begin{aligned} {}_{CM}I_{xx} &= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2 \\ {}_{CM}I_{yy} &= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2 \\ {}_{CM}I_{zz} &= \frac{1}{2}mr^2 \end{aligned}$$

- Momentos de inércia de massa em relação ao ponto de apoio – Teorema dos Eixos Paralelos:

$$\mathbf{I}_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}, \text{ em que } \begin{aligned} I_{xx} &= {}_{CM}I_{xx} + mh^2 \\ I_{yy} &= {}_{CM}I_{yy} + mh^2 \\ I_{zz} &= {}_{CM}I_{zz} \end{aligned}$$

10. Equilíbrio dinâmico [Newton-Euler]:

- Newton:

$$\sum_{s_2} \mathbf{F} = \sum_{s_2} m \mathbf{v}^* + m \mathbf{a}^*$$

- Euler:

$$\sum_{s_2} \mathbf{M}_O = {}_{s_2}\mathbf{I}_O \frac{d}{dt} ({}_{s_2}\boldsymbol{\omega}) + {}_{s_2}\boldsymbol{\Omega} \times ({}_{s_2}\mathbf{I}_O \cdot {}_{s_2}\boldsymbol{\omega}) + {}_{s_2}\mathbf{r}_{O-CM} \times m \sum_{s_2} \mathbf{a}_O$$

Forças atuantes sobre o pião: \mathbf{R} e \mathbf{P}

A base mais apropriada para representar as forças de reação do chão sobre o pião é a base inercial, pois as componentes em X e em Y da força \mathbf{R} não devem ultra-

passar as forças de atrito seco. Se isto acontecer, o pião deslizará sobre a superfície, e as hipóteses adotadas para a velocidade e aceleração não são mais válidas. Assim:

$${}_{10}\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix} \Rightarrow {}_{s2}\mathbf{R} = \mathbf{T}_\theta \mathbf{T}_\varphi, {}_{10}\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_x \cos \varphi + R_y \sin \varphi \\ -R_x \cos \theta \sin \varphi + R_y \cos \theta \cos \varphi + R_z \sin \theta \\ R_x \sin \theta \sin \varphi - R_y \sin \theta \cos \varphi + R_z \cos \theta \end{Bmatrix}$$

$${}_{10}\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{Bmatrix} \Rightarrow {}_{s2}\mathbf{P} = \mathbf{T}_\theta \mathbf{T}_\varphi, {}_{10}\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \sin \theta \\ -mg \cos \theta \end{Bmatrix}$$

$$\sum {}_{s2}\mathbf{M}_O = {}_{s2}\mathbf{h} \times {}_{s2}\mathbf{P} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ 0 & 0 & h \\ 0 & -mg \sin \theta & -mg \cos \theta \end{vmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} mgh \sin \theta \\ 0 \\ M \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_O \cdot \frac{d}{dt}({}_{s2}\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\varphi} \cos \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta + \dot{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{xx} \ddot{\theta} \\ I_{yy} (\ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta) \\ I_{zz} (\ddot{\varphi} \cos \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta + \dot{\varphi}) \end{Bmatrix}$$

$${}_{s2}\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{I}_O \cdot {}_{s2}\boldsymbol{\omega}) = {}_{s2}\boldsymbol{\Omega} \times \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{Bmatrix}$$

$$= {}_{s2}\boldsymbol{\Omega} \times \begin{Bmatrix} I_{xx} \dot{\theta} \\ I_{yy} \dot{\varphi} \sin \theta \\ I_{zz} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ \dot{\theta} & \dot{\varphi} \sin \theta & \dot{\varphi} \cos \theta \\ I_{xx} \dot{\theta} & I_{yy} \dot{\varphi} \sin \theta & I_{zz} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow {}_{s2}\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{I}_O \cdot {}_{s2}\boldsymbol{\omega}) = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}^2 (I_{zz} - I_{yy}) \sin \theta \cos \theta + I_{zz} \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{\varphi} \dot{\theta} (I_{xx} - I_{zz}) \cos \theta - I_{zz} \dot{\varphi} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \dot{\theta} (I_{yy} - I_{xx}) \sin \theta \end{Bmatrix}$$

$$\sum {}_{s2}\mathbf{M}_O = \mathbf{I}_O \cdot \frac{d}{dt}({}_{s2}\boldsymbol{\omega}) + {}_{s2}\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{I}_O \cdot {}_{s2}\boldsymbol{\omega}) + \underbrace{{}_{s2}\mathbf{r}_{O-CM} \times m}_{=0} {}_{s2}\mathbf{a}_O$$

Substituindo-se os momentos de inércia do Item 9 na equação anterior, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} mgh \sin \theta \\ 0 \\ M \end{Bmatrix} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi} \cdot \left[\dot{\varphi} \cdot c_M I_{zz} \cdot \sin \theta + \frac{g}{\omega} \cdot \sin 2\theta \cdot (c_M I_{zz} - c_M I_{yy} - mh^2) \right] + \ddot{\theta} \cdot (c_M I_{xx} + mh^2) \\ - \ddot{\theta} \cdot \dot{\varphi} c_M I_{zz} + \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \theta \cdot [c_M I_{xx} - c_M I_{zz} + c_M I_{yy} + 2mh^2] + \ddot{\varphi} \cdot \sin \theta \cdot (c_M I_{yy} + mh^2) \\ \dot{\varphi} \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta \cdot [c_M I_{yy} - c_M I_{xx} - c_M I_{zz}] + (\ddot{\varphi} \cdot \cos \theta + \dot{\varphi}^2) c_M I_{zz} \end{array} \right\}$$

Com o auxílio do sistema de equações anterior, chega-se às três equações diferenciais não lineares de segunda ordem, responsáveis por descrever os movimentos de:

□ *Precessão*

$$\ddot{\varphi} = \frac{\dot{\theta}}{\sin \theta \cdot (c_M I_{xx} + mh^2)} \cdot \left[\dot{\varphi} \cdot c_M I_{zz} + \dot{\varphi} \cos \theta \cdot (c_M I_{zz} - c_M I_{xx} - c_M I_{yy} - 2mh^2) \right]$$

□ *Nutação*

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta}{c_M I_{xx} + mh^2} \cdot \left[mgh + \dot{\varphi} \cdot [-c_M I_{zz} \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta \cdot (c_M I_{yy} - c_M I_{xx} + mh^2)] \right]$$

□ *Spin ou rotação própria*

$$\ddot{\varphi} = \frac{\dot{\theta}}{\tan \theta \cdot (c_M I_{yy} + mh^2)} \cdot \left[-c_M I_{zz} \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta \cdot (c_M I_{xx} + c_M I_{yy} - c_M I_{zz} + 2mh^2) \right] \\ + \frac{1}{c_M I_{zz}} \cdot \left[M + \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \cdot (c_M I_{xx} - c_M I_{yy} + c_M I_{zz}) \right]$$

Para obter as reações dinâmica entre a ponta do pião e o chão resolve-se a equação

$$\sum_{B_2} \mathbf{F} = m_{B_2} \mathbf{a}^* = {}_{B_2} \mathbf{R} + {}_{B_2} \mathbf{P} = \mathbf{T}_\theta \mathbf{T}_\varphi \mathbf{R} + \mathbf{T}_\theta \mathbf{T}_\varphi \mathbf{P}$$

Substituindo-se todos os termos, calculados anteriormente, na equação de Newton tem-se:

$$\mathbf{T}_\theta \mathbf{T}_\varphi \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \end{Bmatrix} + m \cdot h \begin{Bmatrix} 2\dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta + \ddot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta - \ddot{\theta} \\ -\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - \dot{\theta}^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\varphi^T \mathbf{T}_\theta^T \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \end{Bmatrix} + m \cdot h \begin{Bmatrix} 2\dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta + \ddot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta - \ddot{\theta} \\ -\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - \dot{\theta}^2 \end{Bmatrix} \right)$$

Efetuada-se as operações, chega-se ao valores das reações entre o pião e o chão:

- Componente R_x da força de reação:

$$R_x = \cos \varphi \left[m \dot{\theta} h (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\phi}) + mh (\ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta) \right] + \\ + \sin \varphi \left[-mg \sin \theta - m \dot{\varphi} h \sin \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\phi}) + mh \ddot{\theta} \right]$$

- Componente R_y da força de reação:

$$R_y = \cos \theta \sin \varphi \left[m \dot{\theta} h (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\phi}) + mh (\ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta) \right] + \\ + \cos \theta \cos \varphi \left[mg \sin \theta + m \dot{\varphi} h \sin \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\phi}) - mh \ddot{\theta} \right] + \\ + \sin \theta \left[-mg \cos \theta + mh (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \right]$$

- Componente R_z da força de reação:

$$R_z = \sin \theta \sin \varphi \left[m \dot{\theta} h (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\phi}) + mh (\ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta) \right] + \\ + \sin \theta \cos \varphi \left[mg \sin \theta + m \dot{\varphi} h \sin \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\phi}) - mh \ddot{\theta} \right] - \\ - \cos \theta \left[-mg \cos \theta + mh (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \right]$$

As componentes da força de reação R_x e R_y devem ser sempre menores que as forças de atrito seco, para que o pião não escorregue, e para que a modelagem aqui apresentada continue válida, ou seja: $\sqrt{R_x^2 + R_y^2} \leq \mu \| R_z \|$.

11. Programa computacional para a resolução das equações de movimento do pião – Linguagem Pascal:

```
program pião;
uses crt;

{DEFINICAO DAS VARIÁVEIS DO PROGRAMA}
var
psi,phi,teta : real;
Dpsi,Dphi,Dteta : real;
DDpsi,DDphi,DDteta : real;
t,tempo,deltat,freq,x,mp,h,l,cglxx,cglyy: real;
lx,lyy,lzz,cglzz,Mz,mom,hx,hy,hz : real;
arq1,arq2,arq3,arq4,arq5,arq6,arq7,arq8 : text;
l,n,fin,j,a : integer;

{DEFINICAO DAS CONSTANTES DO PROGRAMA}
const
g = 9.81; {aceleracao da gravidade [m/s2]}
```

```

{INICIO DO PROGRAMA PRINCIPAL}
begin
  clrscr;

  {DADOS RELACIONADOS COM A INTEGRAÇÃO NUMÉRICA}
  t := 0.0; {tempo inicial em [s]}
  tempo := 10; {tempo total de análise do movimento em [s]}
  n := 30000; {numero total de pontos utilizados}
  a := 1; {numero de vezes para a repetição da integração}
  deltat := (tempo/a)/n; {passo de integração em [s]}
  fim := 1; {critério para fechamento dos arquivos}

  {NOME DOS ARQUIVOS ONDE OS RESULTADOS SERÃO ARMAZENADOS}
  assign(arq1,'arqpsi.res');
  assign(arq2,'arqphi.res');
  assign(arq3,'arqteta.res');
  assign(arq4,'arqh.res');
  assign(arq5,'arqdpsi.res');
  assign(arq6,'arqdphi.res');
  assign(arq7,'arqdteta.res');
  assign(arq8,'arqhz.res');

  {DADOS GEOMÉTRICOS E DE MASSA DO PIAO}
  mp := 0.582; {massa total do piao em [kg]}
  l := 0.0215; {espessura do disco do piao em [m]}
  r := 0.05; {raio do disco do piao [m]}
  h := 0.0558; {comprimento do eixo do piao [m]}
  Ixx := 0.00209393; {momento de inércia Ixx em relação a O}
  Iyy := 0.00209393; {momento de inércia Iyy em relação a O}
  Izz := 0.00220580; {momento de inércia Izz em relação a O}

  {CONDIÇÕES INICIAIS DE MOVIMENTO}
  psi := 0.0; {ângulo inicial de precessão em [rad]}
  teta := (5/180)*2*3.14159; {ângulo inicial de nutação em [rad]}
  phi := 0.0; {ângulo inicial em relação ao spin em [rad]}
  Dpsi := (0/180)*2*3.14159; {precessão inicial em [rad/s]}
  Dteta := 0.0; {nutação inicial em [rad/s]}
  Dphi := 7*2*3.14159; {spin inicial em [rad/s]}
  Mz := -0.001; {momento aplicado ao piao no eixo Z2 em [Nm]}
  hx := h*sin(teta)*sin(psi); {posição inicial do CM - direção X}
  hy := -h*sin(teta)*cos(psi); {posição inicial do CM - direção Y}
  hz := h*cos(teta); {posição inicial do CM - direção Z}

  {ABERTURA DOS ARQUIVOS}
  rewrite(arq1);
  rewrite(arq2);
  rewrite(arq3);
  rewrite(arq4);

```

```

rewrite(arq5);
rewrite(arq6);
rewrite(arq7);
rewrite(arq8);

{CONDICÖES INICIAIS DO MOVIMENTO ARMAZENADAS NOS ARQUIVOS}
writeln(arq1,t,' ',psi);
writeln(arq2,t,' ',phi);
writeln(arq3,t,' ',teta);
writeln(arq4,hx,' ',hy);
writeln(arq5,t,' ',Dpsi);
writeln(arq6,t,' ',Dphi);
writeln(arq7,t,' ',Dteta);
writeln(arq8,t,' ',hz);

{INICIO DA ANALISE DO MOVIMENTO NO DOMINIO DO TEMPO}
for j:=1 to a do
begin
for i:=2 to n do
begin
t := t + deltat; {variacao do tempo}

{CALCULO DAS ACELERACOES ANGULARES}
DDteta:= (1/IOX)*(mp*g*h*sin(teta)+Sqr(Dpsi)*(-Izz+Iyy)*sin(teta)* cos(teta)-
Izz*Dphi*Dpsi*sin(teta));
DDpsi:= (1/(Iyy*sin(teta)))*(Izz*Dpsi*Dteta*cos(teta)+ Dpsi*Dteta*cos(teta)*(-Ixx-
Iyy)+Izz*Dphi*Dteta);
DDphi:= (1/Izz)*(-Izz*DDpsi*cos(teta)+Izz*Dpsi*Dteta*sin(teta)+ Dpsi*Dteta*
(-Iyy+IOX)*sin(teta)+Mz);

{CALCULO DAS VELOCIDADES ANGULARES}
Dpsi := Dpsi + deltat * DDpsi;
Dphi := Dphi + deltat * DDphi;
Dteta:= Dteta + deltat * DDteta;

{CALCULO DOS DESLOCAMENTOS ANGULARES}
psi := psi + deltat * Dpsi;
phi := phi + deltat * Dphi;
teta := teta + deltat * Dteta;

{CALCULO DA POSICAO DO CENTRO DE MASSA DO PIAO}
hx := h*sin(teta)*sin(psi);
hy := -h*sin(teta)*cos(psi);
hz := h*cos(teta);

{IMPRESSAO DOS RESULTADOS NA TELA}
writeln('*****', i);
writeln('t: ',t,' psi: ',psi);
writeln('t: ',t,' phi: ',phi);
writeln('t: ',t,' teta: ',teta);

```

```

writeln("");
writeln(DDpsi:5:5,' ',DDteta:5:5,' ',DDphi:5:5);

{ARMAZENAMENTO DOS RESULTADOS NOS ARQUIVOS}
writeln(arq1,t,' ',psi);
writeln(arq2,t,' ',phi);
writeln(arq3,t,' ',teta);
writeln(arq5,t,' ',Dpsi);
writeln(arq6,t,' ',Dphi);
writeln(arq7,t,' ',Dteta);
writeln(arq4,hx,' ',hy);
writeln(arq8,t,' ',hz);

{CRITERIO PARA PARAR A INTEGRACAO}
if teta >= (PI/2) - arctan(r/0.0442) then
begin
writeln('PIAO TOCOU O CHAO');
close(arq1);close(arq2);close(arq3);close(arq4);
close(arq5);close(arq6);close(arq7);close(arq8);
j:=a;
i:=n;
fim:=0;
readln;
end;
end;
end;
ifim < >0 then
begin
close(arq1);close(arq2);close(arq3);close(arq4);
close(arq5);close(arq6);close(arq7);close(arq8);
end;
end.

```

12. *Resultados e interpretação dos resultados para diferentes condições iniciais de movimento:*

As Figuras 2.37 e 2.38 mostram a órbita no plano XY e a variação da altura do centro de massa do pião ao longo do tempo, até o instante em que o pião toca o chão. As condições iniciais de movimento são dadas no caso (a). Um momento de perdas M_z relativamente grande é considerado nessas simulações e faz com que a rotação própria do pião se reduza rapidamente e que o pião toque o chão após 2,5 segundos de movimento. O comportamento dos ângulos de precessão, nutação e spin (rotação própria) em função do tempo são analisados nas Figuras 2.39-2.41 para as mesmas condições iniciais dadas (veja animações no CD-ROM).

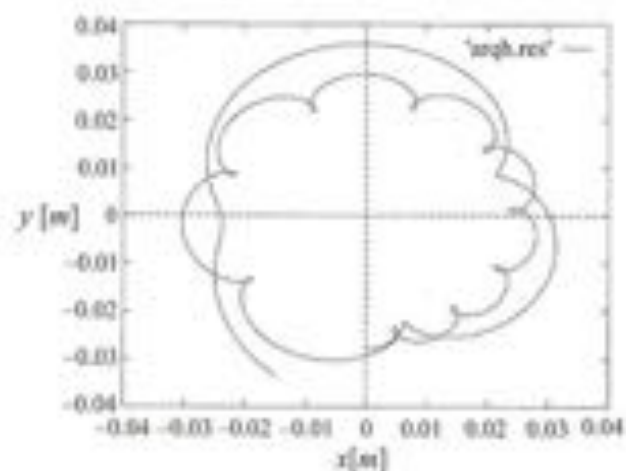


Figura 2.37

Orbita realizada pelo centro de massa do pêlo no plano XY em função do tempo, até o disco do pêlo tocar o chão. Condições iniciais dadas no caso (a).

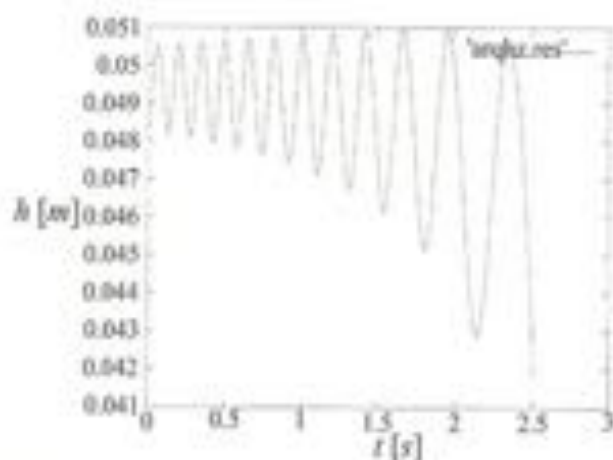


Figura 2.38

Comportamento da altura do centro de massa em função do tempo, até o disco do pêlo tocar o chão. Condições iniciais dadas no caso (a).

□ *Caso (a) – Momento de perdas grande.*

□ *Condições iniciais:*

$$\psi := 0.0;$$

$$\theta := (15/180) \cdot 2 \cdot 3.14159;$$

$$\phi := 0.0;$$

$$D\psi := (200/180) \cdot 2 \cdot 3.14159;$$

$$D\theta := 0.0;$$

$$D\phi := 7 \cdot 2 \cdot 3.14159;$$

$$M_z := -0.025.$$

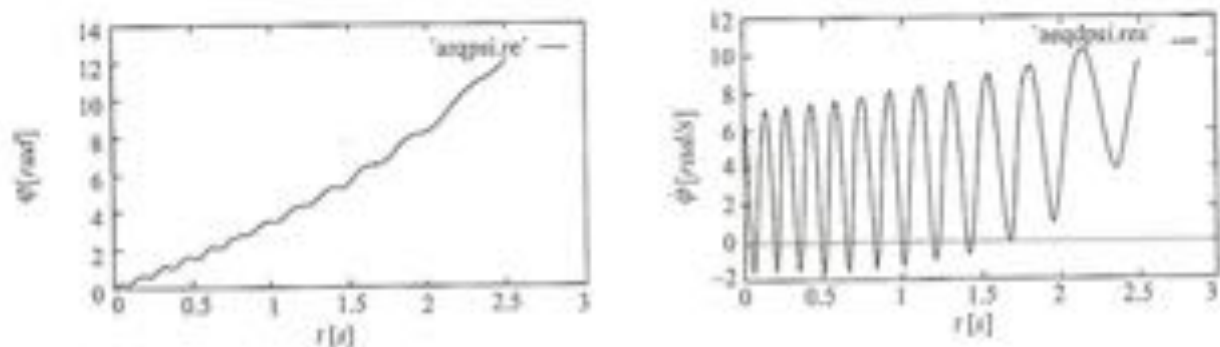


Figura 2.39

Precessão: ϕ e $\dot{\phi}$ em função do tempo para as condições iniciais dadas no caso (a).

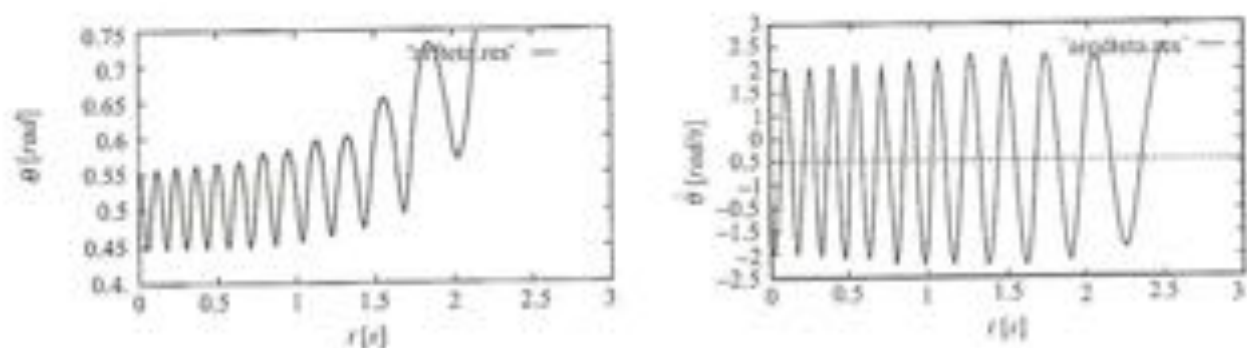


Figura 2.40

Nutação: θ e $\dot{\theta}$ em função do tempo para as condições iniciais dadas no caso (a).

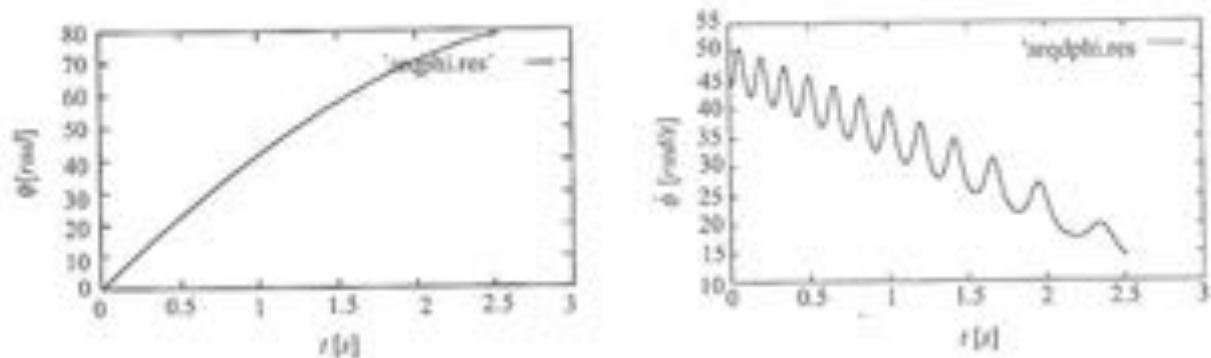


Figura 2.41

Spin: ϕ e $\dot{\phi}$ em função do tempo para as condições iniciais dadas no caso (a).

□ *Caso (b) – Momento de perdas pequeno.*

□ *Condições iniciais:*

$\psi := 0.0;$
 $\theta := (15/180) * 2 * 3.14159;$
 $\phi := 0.0;$
 $D\psi := (50/180) * 2 * 3.14159;$
 $D\theta := 0.0;$
 $D\phi := 7 * 2 * 3.14159;$
 $Mz := -0.001.$

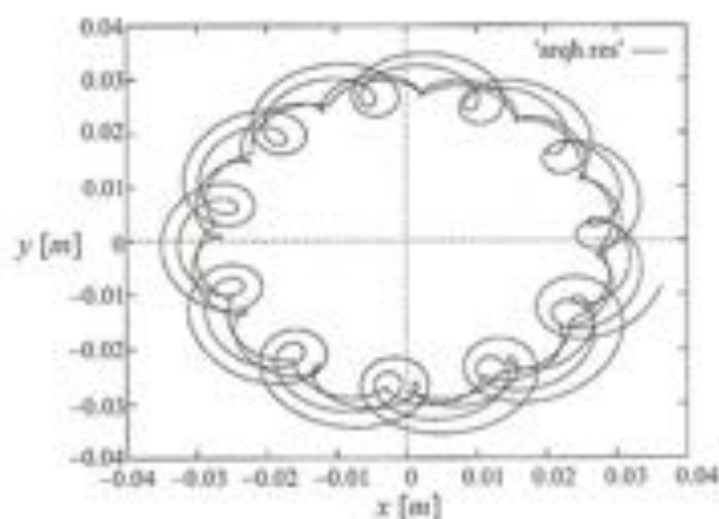


Figura 2.42

Órbita realizada pelo centro de massa do pêlo no plano XY em função do tempo, até o disco da pêlo tocar o chão. As condições iniciais de movimento são dadas no caso (b) e são tais que o pêlo realiza várias voltas (precessão) antes de tocar o chão. Observa-se nitidamente que, quando o momento de perdas Mz é pequeno, o pêlo leva mais tempo para tocar o chão.

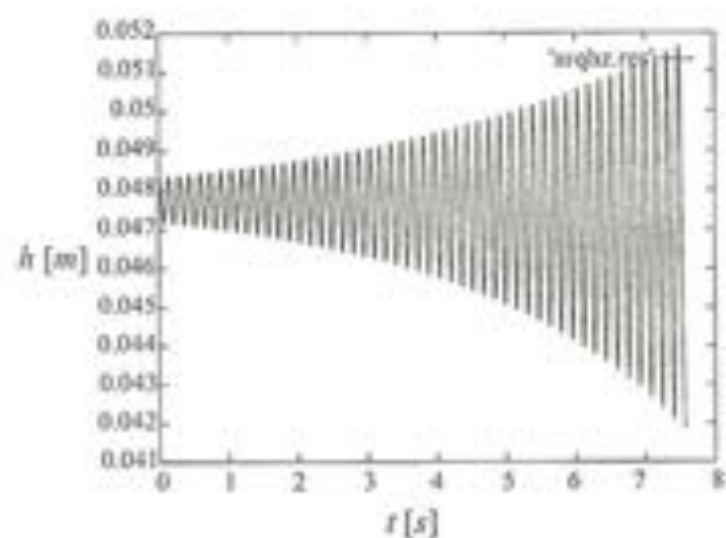


Figura 2.43

Movimento realizado pela altura do centro de massa do pêlo em função do tempo, até o disco do pêlo tocar o chão. As condições iniciais de movimento são dadas no caso (b), e são tais que o pêlo realiza várias voltas (precessão) antes de tocar o chão. Observa-se nitidamente que, quando o momento de perdas Mz é pequeno, o pêlo leva mais tempo para tocar o chão, no caso, 7.5 segundos.

- *Caso (c) – Ângulo de nutação inicial (inclinação do pino) pequena, $\theta = 10^\circ$, e momento de perdas também pequeno.*

- *Condições iniciais:*

psi := 0.0;
 teta := (5/180) * 2 * 3.14159;
 phi := 0.0;
 Dpsi := 0.0
 Dteta := 0.0;
 Dphi := 7 * 2 * 3.14159;
 Mz := -0.001.

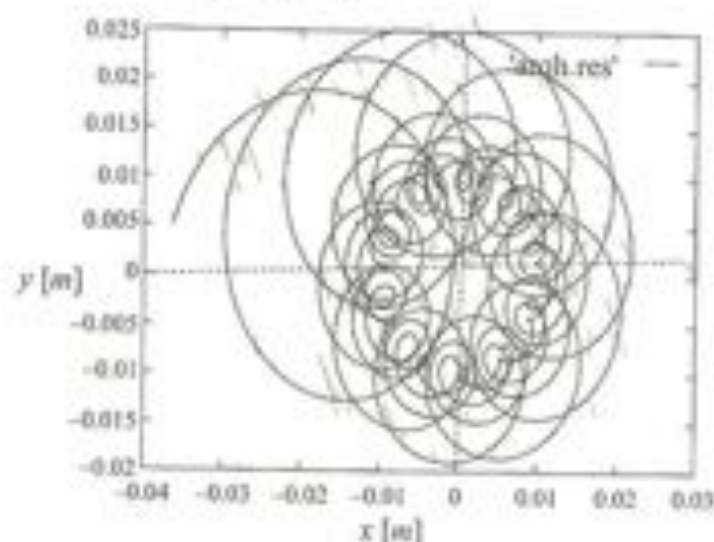


Figura 2.44

Órbita realizada pelo centro de massa do pino no plano XY em função do tempo, até o disco do pino tocar o chão. As condições iniciais de movimento são dadas no caso (c) e são tais que o pino não realiza muitas voltas completas (precessão) até tocar o chão (veja animação gráfica e filmagem dos movimentos reais do pino no CD).

13. *Levantamento das equações de movimento e das reações dinâmicas utilizando o programa MATHEMATICA (manipulação simbólica – veja CD-ROM).*

- *Inicialização de um "pacote" que permite a utilização da função Cross (produto vetorial):*

<<LinearAlgebra`CrossProduct`

DEFINIÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE COMO UMA FUNÇÃO DO TEMPO

- *Definição das variáveis e de sua dependência no tempo*

psi[t];
 teta[t];
 phi[t];

- *Derivada primeira dos ângulos em função do tempo. Observa-se que, se o passo anterior não for realizado, as derivadas (D) das coordenadas anteriormente definidas serão nulas:*

D[psi[t],t]
 D[teta[t],t]
 D[phi[t],t]

psi'[t]
teta'[t]
phi'[t]

- *Derivada segunda dos ângulos em função do tempo:*

D[psi[t],{t,2}]
D[teta[t],{t,2}]
D[phi[t],{t,2}]

psi''[t]
teta''[t]
phi''[t]

MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

- *Matriz 1 – rotação em torno do eixo Z: a matriz 1 transforma a representação de vetores definidos no sistema de referência inercial para o sistema móvel B1:*

Tpsi=List {{Cos[psi[t]],Sin[psi[t]],0},
{-Sin[psi[t]],Cos[psi[t]],0},
{0,0,1}};

MatrixForm[Tpsi]

Cos[psi[t]]	Sin[psi[t]]	0
-Sin[psi[t]]	Cos[psi[t]]	0
0	0	1

- *Matriz 2 – rotação em torno do eixo X1: a matriz 2 transforma a representação de vetores definidos no sistema móvel B1 para o sistema móvel B2:*

Tteta=List({1,0,0},
{0,Cos[teta[t]],Sin[teta[t]]},
{0,-Sin[teta[t]],Cos[teta[t]]});

MatrixForm[Tteta]

1	0	0
0	Cos[teta[t]]	Sin[teta[t]]
0	-Sin[teta[t]]	Cos[teta[t]]

- *Matriz 3 – rotações consecutivas em torno do eixo Z e do eixo X1: a matriz 3 transforma a representação de vetores definidos no sistema de referência inercial para o sistema móvel B2 diretamente:*

Tt=Tteta.Tpsi;
MatrixForm[Tt]

Cos[psi[t]]	Sin[psi[t]]	0
-(Cos[teta[t]] Sin[psi[t]])	Cos[psi[t]] Cos[teta[t]]	Sin[teta[t]]
Sin[psi[t]] Sin[teta[t]]	-(Cos[psi[t]] Sin[teta[t]])	Cos[teta[t]]

VETORES DE POSIÇÃO

- *Vetor de posição do C.M. do corpo representado no sistema móvel B2:*

$$B2rcg = \{0, 0, h\}$$

$$\{0, 0, h\}$$

VETORES DE VELOCIDADE

- *Velocidades angulares relativas (precessão, nutação e spin):*

$$Idpsi = \{0, 0, D[psi[t], t]\}$$

$$B1dteta = \{D[teta[t], t], 0, 0\}$$

$$B2dphi = \{0, 0, D[phi[t], t]\}$$

$$\{0, 0, psi'[t]\}$$

$$\{teta'[t], 0, 0\}$$

$$\{0, 0, phi'[t]\}$$

- *As velocidades anteriores são escritas a seguir no sistema B2:*

$$B2dpsi = Tt.Idpsi$$

$$B2dteta = Tteta.B1dteta$$

$$\{0, \text{Sin}[teta[t]] psi'[t], \text{Cos}[teta[t]] psi'[t]\}$$

$$\{teta'[t], 0, 0\}$$

- *Velocidade angular absoluta do sistema móvel B2:*

$$B2omega = B2dpsi + B2dteta$$

$$\{teta'[t], \text{Sin}[teta[t]] psi'[t], \text{Cos}[teta[t]] psi'[t]\}$$

- *Velocidade angular absoluta do corpo:*

$$B2W = B2omega + B2dphi$$

$$\{teta'[t], \text{Sin}[teta[t]] psi'[t], phi'[t] + \text{Cos}[teta[t]] psi'[t]\}$$

- *Velocidade linear absoluta do C.M. do corpo representada no sistema B2:*

$$B2vcg = \text{Cross}[B2omega, B2rcg]$$

$$\{h \text{Sin}[teta[t]] psi'[t], -(h teta'[t]), 0\}$$

VETORES DE ACELERAÇÃO

- *Aceleração angular absoluta do sistema móvel B2 representada com auxílio da base B2:*

$$B2Domega = D[B2omega, t] + \text{Cross}[B2omega, B2omega]$$

$$\begin{aligned} & \{\text{Sin}[\text{teta}''[t], \\ & \text{Cos}[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] \text{teta}'[t] + \text{Sin}[\text{teta}[t]] \text{psi}''[t], \\ & -(\text{Sin}[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] \text{teta}'[t]) + \text{Cos}[\text{teta}[t]] \text{psi}''[t]\} \end{aligned}$$

- *Aceleração angular absoluta do corpo representada com auxílio da base móvel B2:*

$$B2\omega\omega = D[B2\omega, t] + \text{Cross}[B2\omega, B2\omega]$$

$$\begin{aligned} & \{\text{Sin}[\text{teta}[t]] \text{phi}''[t] \text{psi}'[t] + \text{teta}''[t], \\ & -(\text{phi}''[t] \text{teta}'[t]) + \text{cos}[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] \text{teta}'[t] + \text{Sin}[\text{teta}[t]] \text{psi}''[t], \\ & -(\text{Sin}[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] \text{teta}'[t]) + \text{phi}''[t] + \text{Cos}[\text{teta}[t]] \text{psi}''[t]\} \end{aligned}$$

- *Aceleração linear absoluta do C.M. do corpo representada na base móvel B2:*

$$B2acg = \text{Cross}[B2\omega, \text{Cross}[B2\omega, B2rcg]] + \text{Cross}[B2Domega, B2rcg]$$

$$\begin{aligned} & \{2 h \text{Cos}[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] \text{teta}'[t] + h \text{Sin}[\text{teta}[t]] \text{psi}''[t], \\ & h \text{Cos}[\text{teta}[t]] \text{Sin}[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] - h \text{teta}''[t], \\ & -\{h \text{Sin}[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t]\} - h \text{teta}'[t]\} \end{aligned}$$

PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS E DE MASSA DO CORPO

- *Dados geométricos e momentos de inércia em relação ao C.M.:*

mp;
g;
l;
h;
r;

cglxx;
cglyy;
cglzz;

- *Tensor de inércia:*

lcg = List[{(cglxx, 0, 0), (0, cglyy, 0), (0, 0, cglzz)}];
MatrixForm[lcg]

$$\begin{array}{ccc} \text{cglxx} & 0 & 0 \\ 0 & \text{cglyy} & 0 \\ 0 & 0 & \text{cglzz} \end{array}$$

REPRESENTAÇÃO VETORIAL DAS FORÇAS E DOS MOMENTOS

- *Forças externas aplicadas ao corpo – somente a força peso é aplicada externamente ao corpo:*

$$P = \{0, 0, -mp \cdot g\}$$

$$\{0, 0, -(g \cdot mp)\}$$

- *A força peso é descrita a seguir na base B2:*

$$B2P = Tt.P$$

$$\{0, -(g \text{ mp Sin[teta[t]]}), -(g \text{ mp Cos[teta[t]]})\}$$

EQUILÍBRIO DINÂMICO [NEWTON-EULER]

- *[Newton] Reações de apoio calculadas com auxílio do equilíbrio dinâmico:*

$$IR = -P + mp * \text{Transpose}[Tt].B2acg$$

$$\begin{aligned} & \{mp (\text{Sin}[\psi[t]] \text{Sin}[\text{teta}[t]] \{-h \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi'^2[t] - h \text{teta}'^2[t]\}) + \\ & \text{Cos}[\psi[t]] (2 h \text{Cos}[\text{teta}[t]] \psi'[t] \text{teta}'[t] + h \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi''[t]) - \\ & \text{Cos}[\text{teta}[t]] \text{Sin}[\psi[t]] (h \text{Cos}[\text{teta}[t]] \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi'^2[t] - h \text{teta}''[t]), \\ & mp \{-\text{Cos}[\psi[t]] \text{Sin}[\text{teta}[t]] \{-h \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi'^2[t] - h \text{teta}'^2[t]\}) + \\ & \text{Sin}[\psi[t]] (2 h \text{Cos}[\text{teta}[t]] \psi'[t] \text{teta}'[t] + h \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi''[t]) + \\ & \text{Cos}[\psi[t]] \text{Cos}[\text{teta}[t]] (h \text{Cos}[\text{teta}[t]] \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi'^2[t] - h \text{teta}''[t]), \\ & g \text{ mp} + mp (\text{Cos}[\text{teta}[t]] \{-h \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi'^2[t] - h \text{teta}'^2[t]\}) + \\ & \text{Sin}[\text{teta}[t]] (h \text{Cos}[\text{teta}[t]] \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi'^2[t] - h \text{teta}''[t]) \} \end{aligned}$$

- *[Newton] As reações de apoio são descritas com auxílio da base B2 a seguir:*

$$B2R = Tt.IR$$

$$\begin{aligned} & \{mp \text{Sin}[\psi[t]] \{-\text{Cos}[\psi[t]] \text{Sin}[\text{teta}[t]] \{-h \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi'^2[t] - h \text{teta}'^2[t]\}) + \\ & \text{Sin}[\psi[t]] (2 h \text{Cos}[\text{teta}[t]] \psi'[t] \text{teta}'[t] + h \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi''[t]) + \\ & \text{Cos}[\psi[t]] \text{Cos}[\text{teta}[t]] (h \text{Cos}[\text{teta}[t]] \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi'^2[t] - h \text{teta}''[t]) + \\ & mp \text{Cos}[\psi[t]] (\text{Sin}[\psi[t]] \text{Sin}[\text{teta}[t]] \{-h \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi'^2[t] - h \text{teta}'^2[t]\}) + \\ & \text{Cos}[\psi[t]] (2 h \text{Cos}[\text{teta}[t]] \psi'[t] \text{teta}'[t] + h \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi''[t]) - \\ & \text{Cos}[\text{teta}[t]] \text{Sin}[\psi[t]] (h \text{Cos}[\text{teta}[t]] \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi'^2[t] - h \text{teta}''[t]), \\ & mp \text{Cos}[\psi[t]] \text{Cos}[\text{teta}[t]] \{-\text{Cos}[\psi[t]] \text{Sin}[\text{teta}[t]] \\ & \{-h \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi'^2[t] - h \text{teta}'^2[t]\}) + \\ & \text{Sin}[\psi[t]] (2 h \text{Cos}[\text{teta}[t]] \psi'[t] \text{teta}'[t] + h \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi''[t]) + \\ & \text{Cos}[\psi[t]] \text{Cos}[\text{teta}[t]] (h \text{Cos}[\text{teta}[t]] \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi'^2[t] - h \text{teta}''[t]) - \\ & mp \text{Cos}[\text{teta}[t]] \text{Sin}[\psi[t]] (\text{Sin}[\psi[t]] \text{Sin}[\text{teta}[t]] \\ & \{-h \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi'^2[t] - h \text{teta}'^2[t]\}) + \\ & \text{Cos}[\psi[t]] (2 h \text{Cos}[\text{teta}[t]] \psi'[t] \text{teta}'[t] + h \text{Sin}[\text{teta}[t]] \psi''[t]) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cos[\theta(t)] \sin[\psi(t)] (h \cos[\theta(t)] \sin[\theta(t)] \psi'^2(t) - h \theta''(t)) + \\
& \sin[\theta(t)] (g m_p + m_p (\cos[\theta(t)] (-h \sin[\theta(t)] \psi'^2(t) - h \theta''(t)) + \\
& \sin[\theta(t)] (h \cos[\theta(t)] \sin[\theta(t)] \psi'^2(t) - h \theta''(t))), \\
& -[m_p \cos[\psi(t)] \sin[\theta(t)] (-\cos[\psi(t)] \sin[\theta(t)] \\
& (-h \sin[\theta(t)] \psi'^2(t) - h \theta''(t)) + \\
& \sin[\psi(t)] (2 h \cos[\theta(t)] \psi'(t) \theta'(t) + h \sin[\theta(t)] \psi''(t)) + \\
& \cos[\psi(t)] \cos[\theta(t)] (h \cos[\theta(t)] \sin[\theta(t)] \psi'^2(t) - h \theta''(t)) + \\
& m_p \sin[\psi(t)] \sin[\theta(t)] (\sin[\psi(t)] \sin[\theta(t)] \\
& (-h \sin[\theta(t)] \psi'^2(t) - h \theta''(t)) + \\
& \cos[\psi(t)] (2 h \cos[\theta(t)] \psi'(t) \theta'(t) + h \sin[\theta(t)] \psi''(t) - \\
& \cos[\theta(t)] \sin[\psi(t)] (h \cos[\theta(t)] \sin[\theta(t)] \psi'^2(t) - h \theta''(t)) + \\
& \cos[\theta(t)] (g m_p + m_p (\cos[\theta(t)] (-h \sin[\theta(t)] \psi'^2(t) - h \theta''(t)) + \\
& \sin[\theta(t)] (h \cos[\theta(t)] \sin[\theta(t)] \psi'^2(t) - h \theta''(t)))
\end{aligned}$$

- [Euler] Somatória de momentos em relação ao C.M.:

$$B_2 S M c_g = \text{Cross}[-B_2 r_{cg}, B_2 R] + \{0, 0, M z\}$$

$$\begin{aligned}
& \{g h m_p \sin[\theta(t)] + h m_p \cos[\psi(t)] \cos[\theta(t)] \sin[\theta(t)] \psi'^2(t) + \\
& h m_p \cos[\theta(t)] \sin[\psi(t)] \sin[\theta(t)] \psi'^2(t) + \\
& h m_p \cos[\psi(t)] \cos[\theta(t)] \sin[\theta(t)] \psi'^2(t) + \\
& h m_p \cos[\theta(t)] \sin[\psi(t)] \sin[\theta(t)] \psi'^2(t) - \\
& h m_p \cos[\theta(t)] \sin[\theta(t)] \theta'^2(t) + \\
& h m_p \cos[\psi(t)] \cos[\theta(t)] \sin[\theta(t)] \theta'^2(t) + \\
& h m_p \cos[\theta(t)] \sin[\psi(t)] \sin[\theta(t)] \theta'^2(t) - \\
& h m_p \cos[\psi(t)] \cos[\theta(t)] \theta''(t) - \\
& h m_p \cos[\theta(t)] \sin[\psi(t)] \theta''(t) - h m_p \sin[\theta(t)] \theta''(t), \\
& -2 h m_p \cos[\psi(t)] \cos[\theta(t)] \psi'(t) \theta'(t) - \\
& 2 h m_p \cos[\theta(t)] \sin[\psi(t)] \psi'(t) \theta'(t) - \\
& h m_p \cos[\psi(t)] \sin[\theta(t)] \psi''(t) - h m_p \sin[\psi(t)] \sin[\theta(t)] \psi''(t), M z\}
\end{aligned}$$

- [Euler] Derivada da quantidade de movimento angular:

$$H = I_{cg}.D[B2W,t] + \text{Cross}[B2\omega, (I_{cg}.B2W)]$$

$$\begin{aligned} & \{cglzz \sin[\text{teta}[t]] \text{phi}'[t] \text{psi}'[t] - cglly \cos[\text{teta}[t]] \sin[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t]^2 + \\ & \quad cglzz \cos[\text{teta}[t]] \sin[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t]^2 + cglxx \text{teta}''[t], \\ & \quad -\{cglzz \text{phi}''[t] \text{teta}'[t] + cglxx \cos[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] \text{teta}'[t] - \\ & \quad cglzz \cos[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] \text{teta}'[t] + \\ & \quad cglly (\cos[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] \text{teta}'[t] + \sin[\text{teta}[t]] \text{psi}''[t]), \\ & \quad -\{cglxx \sin[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] \text{teta}'[t] + cglly \sin[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] \text{teta}'[t] + \\ & \quad cglzz (-\sin[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] \text{teta}'[t] + \text{phi}''[t] + \cos[\text{teta}[t]] \text{psi}''[t])\} \end{aligned}$$

- [Euler] Solução do sistema e determinação das equações de movimento:

$$\text{Simplify}[\text{Solve}[B2SMcg == H, \{\text{teta}''[t], \text{psi}''[t], \text{phi}''[t]\}]]$$

$$\begin{aligned} \{\text{phi}''[t] \rightarrow & (\cot[\text{teta}[t]] \{-cglzz \text{phi}'[t] + cglxx \cos[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] + \\ & \quad cglly \cos[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] - cglzz \cos[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t]^2 + \\ & \quad 2 h mp \cos[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] \text{teta}'[t] / (cglly + h mp) + \\ & \quad (Mz + cglxx \sin[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] \text{teta}'[t] - \\ & \quad cglly \sin[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] \text{teta}'[t] \\ & \quad cglzz \sin[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] \text{teta}'[t]) / cglzz, \\ \text{teta}''[t] \rightarrow & (\sin[\text{teta}[t]] (g h mp - cglzz \text{phi}'[t] \text{psi}'[t] + \\ & \quad cglly \cos[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t]^2 - cglzz \cos[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t]^2 + \\ & \quad h mp \cos[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t]) / (cglxx + h mp), \\ \text{psi}''[t] \rightarrow & (\csc[\text{teta}[t]] (cglzz \text{phi}'[t] - cglxx \cos[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] - \\ & \quad cglly \cos[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] + cglzz \cos[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t]^2 - \\ & \quad 2 h mp \cos[\text{teta}[t]] \text{psi}'[t] \text{teta}'[t]) / (cglly + h mp)) \end{aligned}$$

2.11 Corpo Rígido no Espaço com Rolamento (Equações de Movimento + Reações Dinâmicas)

Exemplo 10

Este exemplo tem por finalidade ilustrar mais um caso em que a velocidade angular absoluta do sistema móvel de referência não coincide com a velocidade angular absoluta do corpo. Mesmo assim, nesse sistema móvel, a representação do tensor de inércia permanece constante. Ressaltam-se aqui duas particularidades relacionadas com a modelagem dos movimentos da moeda: (a) As forças de reação no ponto de contato entre o solo e a moeda devem ser descritas na base intermediária, no caso a

base $B2$, pois, se as forças de reação nas respectivas direções $Y2$ e $Z2$ forem maiores que as forças de atrito estático, a moeda deslizará. Nota-se aqui que as forças de atrito estão nas direções $Y2$ e $Z2$. Calculam-se as forças de reação nas respectivas direções e comparam-se seus valores com as forças de atrito estático.

A moeda ilustrada na Figura 2.45 é colocada em movimento sobre a rampa com velocidade inicial nula. A mesma desce com rolamento puro, ou seja, sem deslizamento. Chegue às equações de movimento da moeda e explique como solucioná-las para prever o comportamento da mesma. Qual a condição que deve ser respeitada para que a moeda não escorregue?

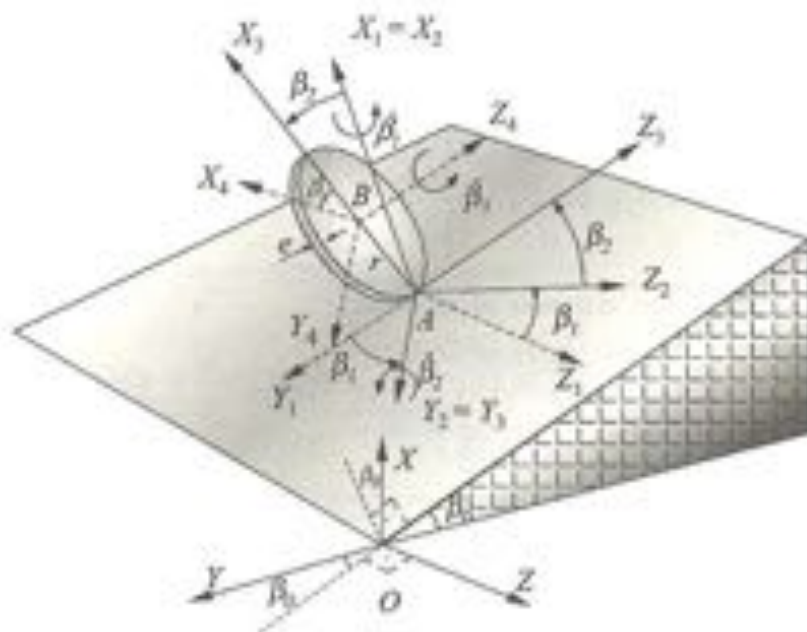


Figura 2.45
Sistemas de referência utilizados para descrever os movimentos de uma moeda em um plano inclinado.

Resolução:

1. Sistemas de referência:

inercial (I): i, j, k - XYZ com origem no ponto O.

móvel (B1): i_1, j_1, k_1 - $X_1Y_1Z_1$ com origem no ponto A.

móvel (B2): i_2, j_2, k_2 - $X_2Y_2Z_2$ com origem no ponto A.

móvel (B3): i_3, j_3, k_3 - $X_3Y_3Z_3$ com origem no ponto A.

móvel (B4): i_4, j_4, k_4 - $X_4Y_4Z_4$ com origem no ponto B.

2. Rotações e matrizes de transformação de coordenadas.

□ Primeira rotação ("rotação fixa" em torno de Z inercial):

$${}_{1}\hat{\beta}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{T}_{\hat{\beta}_0} = \begin{bmatrix} \cos \beta_0 & \sin \beta_0 & 0 \\ -\sin \beta_0 & \cos \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}_{B1}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\hat{\beta}_0} {}_I\mathbf{s} \quad (2.40)$$

□ Segunda rotação (em torno de X_0):

$${}_{s1}\dot{\beta}_1 = \begin{Bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{T}_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_1 & \sin \beta_1 \\ 0 & -\sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{bmatrix} \quad {}_{s2}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\beta_1} {}_{s1}\mathbf{s} \quad (2.41)$$

□ Terceira rotação (em torno de Y_1):

$${}_{s2}\dot{\beta}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{T}_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & 0 & -\sin \beta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta_2 & 0 & \cos \beta_2 \end{bmatrix} \quad {}_{s3}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\beta_2} {}_{s2}\mathbf{s} \quad (2.42)$$

□ Quarta rotação (em torno de Z_2):

$${}_{s3}\dot{\beta}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{T}_{\beta_3} = \begin{bmatrix} \cos \beta_3 & \sin \beta_3 & 0 \\ -\sin \beta_3 & \cos \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}_{s4}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\beta_3} {}_{s3}\mathbf{s} \quad (2.43)$$

3. Velocidade angulares absoluta dos sistemas de referência.

□ Sistema de referência B1 (fixo no plano inclinado):

$${}_{s1}\Omega_1 = \mathbf{T}_{\beta_0} {}_1\dot{\beta}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

□ Sistema de referência móvel B2:

$${}_{s2}\Omega_2 = \mathbf{T}_{\beta_1} \mathbf{T}_{\beta_0} \frac{d}{dt} \dot{\beta}_0 + \mathbf{T}_{\beta_1} {}_{s1}\dot{\beta}_1 = \begin{Bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

□ Sistema de referência móvel B3:

$$\begin{aligned} {}_{s3}\Omega_3 &= \mathbf{T}_{\beta_2} \mathbf{T}_{\beta_1} \mathbf{T}_{\beta_0} \frac{d}{dt} \dot{\beta}_0 + \mathbf{T}_{\beta_2} \mathbf{T}_{\beta_1} {}_{s1}\dot{\beta}_1 + \mathbf{T}_{\beta_2} {}_{s2}\dot{\beta}_2 = \\ {}_{s3}\Omega_3 &= \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & 0 & -\sin \beta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta_2 & 0 & \cos \beta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_1 \sin \beta_2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.46)$$

□ Sistema de referência móvel B4 (solidário à moeda):

$$\begin{aligned} {}_{s4}\Omega_4 &= \mathbf{T}_{\beta_3} \mathbf{T}_{\beta_2} \mathbf{T}_{\beta_1} \mathbf{T}_{\beta_0} \frac{d}{dt} \dot{\beta}_0 + \mathbf{T}_{\beta_3} \mathbf{T}_{\beta_2} \mathbf{T}_{\beta_1} {}_{s1}\dot{\beta}_1 + \mathbf{T}_{\beta_3} \mathbf{T}_{\beta_2} {}_{s2}\dot{\beta}_2 + \mathbf{T}_{\beta_3} {}_{s3}\dot{\beta}_3 \\ {}_{s4}\Omega_4 &= \mathbf{T}_{\beta_3} \left(\underbrace{\mathbf{T}_{\beta_2} \mathbf{T}_{\beta_1} {}_{s1}\dot{\beta}_1 + \mathbf{T}_{\beta_2} {}_{s2}\dot{\beta}_2}_{{}_{s3}\Omega_3} \right) + \mathbf{T}_{\beta_3} {}_{s3}\dot{\beta}_3 \end{aligned}$$

$${}_{B1}\Omega_4 = \begin{bmatrix} \cos \beta_3 & \sin \beta_3 & 0 \\ -\sin \beta_3 & \cos \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_1 \sin \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \dot{\beta}_2 \sin \beta_3 \\ -\dot{\beta}_1 \cos \beta_2 \sin \beta_3 + \dot{\beta}_2 \cos \beta_3 \\ \dot{\beta}_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_3 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

4. Acelerações angulares absolutas dos sistemas de referência.

- Sistema de referência B1 (solidário ao plano inclinado):

$${}_{B1}\dot{\Omega}_1 = \frac{d}{dt} \underbrace{({}_{B1}\Omega_1)}_{=0} + \underbrace{{}_{B1}\Omega_1 \times {}_{B1}\Omega_1}_{=0} = 0 \quad (2.48)$$

- Sistema de referência móvel B2:

$${}_{B2}\dot{\Omega}_2 = \frac{d}{dt} ({}_{B2}\Omega_2) + \underbrace{{}_{B2}\Omega_2 \times {}_{B2}\Omega_2}_{=0} = \begin{bmatrix} \ddot{\beta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

- Sistema de referência móvel B3:

$${}_{B3}\dot{\Omega}_3 = \frac{d}{dt} ({}_{B3}\Omega_3) + \underbrace{{}_{B3}\Omega_3 \times {}_{B3}\Omega_3}_{=0} = \begin{bmatrix} \ddot{\beta}_1 \cos \beta_2 - \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \sin \beta_2 \\ \ddot{\beta}_2 \\ \ddot{\beta}_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_{3x} \\ \dot{\Omega}_{3y} \\ \dot{\Omega}_{3z} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

- Sistema de referência móvel B4:

$${}_{B4}\dot{\Omega}_4 = \frac{d}{dt} ({}_{B4}\Omega_4) + \underbrace{{}_{B4}\Omega_4 \times {}_{B4}\Omega_4}_{=0} = \begin{bmatrix} \ddot{\beta}_1 \cos \beta_2 \cos \beta_3 - \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \sin \beta_2 \cos \beta_3 - \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos \beta_2 \sin \beta_3 + \ddot{\beta}_2 \sin \beta_3 + \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_1 \cos \beta_3 \\ -\ddot{\beta}_1 \cos \beta_2 \sin \beta_3 + \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \sin \beta_2 \sin \beta_3 - \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \ddot{\beta}_2 \cos \beta_3 - \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_1 \sin \beta_3 \\ \ddot{\beta}_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos \beta_2 + \ddot{\beta}_3 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

5. Aceleração linear absoluta do centro de massa da moeda:

$${}_{B3}\mathbf{a}^* = \underbrace{{}_{B3}\mathbf{a}_A}_{(1)} + \underbrace{{}_{B3}\Omega_3 \times {}_{B3}\Omega_3 \times {}_{B3}\mathbf{r}_{AB}}_{(2)} + \underbrace{{}_{B3}\dot{\Omega}_3 \times {}_{B3}\mathbf{r}_{AB}}_{(3)} + \underbrace{2 \underbrace{{}_{B3}\Omega_3}_{(4)} \times \underbrace{{}_{B3}\mathbf{v}_{rel}}_{(5)}}_{(4)} + \underbrace{{}_{B3}\mathbf{a}_{rel}}_{(5)}$$

- (1)

$${}_{B3}\mathbf{a}_A = 0 \quad (\text{não ocorre deslizamento})$$

- (2)

$${}_{B3}\Omega_3 \times \begin{bmatrix} \mathbf{i}_3 & \mathbf{j}_3 & \mathbf{k}_3 \\ \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 & \dot{\beta}_2 & \dot{\beta}_1 \sin \beta_2 \\ r & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_3 & \mathbf{j}_3 & \mathbf{k}_3 \\ \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 & \dot{\beta}_2 & \dot{\beta}_1 \sin \beta_2 \\ 0 & r \dot{\beta}_1 \sin \beta_2 & -r \dot{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \dot{\beta}_2^2 - r (\dot{\beta}_1 \sin \beta_2)^2 \\ r \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos \beta_2 \\ r \dot{\beta}_1^2 \sin \beta_2 \cos \beta_2 \end{bmatrix}$$

□ (3)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i}_3 & \mathbf{j}_3 & \mathbf{k}_3 \\ \dot{\Omega}_{3x} & \dot{\Omega}_{3y} & \dot{\Omega}_{3z} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\dot{\Omega}_{3z} \\ -r\dot{\Omega}_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\dot{\beta}_1 \sin \beta_2 + r\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos \beta_2 \\ -r\dot{\beta}_2 \end{bmatrix}$$

□ (4) Considerando a translação da moeda no plano, $r \cdot \dot{\beta}_1$, decorrente do rolamento puro na direção Y_2 , tem-se:

$${}_{B3}\mathbf{v}_{B0t} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\dot{\beta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, o termo relacionado com a aceleração de Coriolis fica:

$$2 \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i}_3 & \mathbf{j}_3 & \mathbf{k}_3 \\ \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 & \dot{\beta}_2 & \dot{\beta}_1 \sin \beta_2 \\ 0 & r\dot{\beta}_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2r\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \sin \beta_2 \\ 0 \\ 2r\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos \beta_2 \end{bmatrix}$$

□ (5) Considerando a translação da moeda no plano, $\dot{\beta}_2 r$, decorrente do rolamento puro na direção Y_2 , tem-se:

$${}_{B3}\mathbf{a}_{B0t} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\ddot{\beta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo os cinco termos recém-calculados na equação da aceleração, obtém-se:

$${}_{B3}\mathbf{a}^* = \begin{bmatrix} -r\dot{\beta}_2^2 - r(\dot{\beta}_1 \sin \beta_2)^2 - 2r\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \sin \beta_2 \\ 2r\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos \beta_2 + r\ddot{\beta}_1 \sin \beta_2 + r\ddot{\beta}_2 \\ r\dot{\beta}_1^2 \sin \beta_2 \cos \beta_2 - r\ddot{\beta}_2 + 2r\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos \beta_2 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

6. DCL – Diagrama de Corpo Livre:

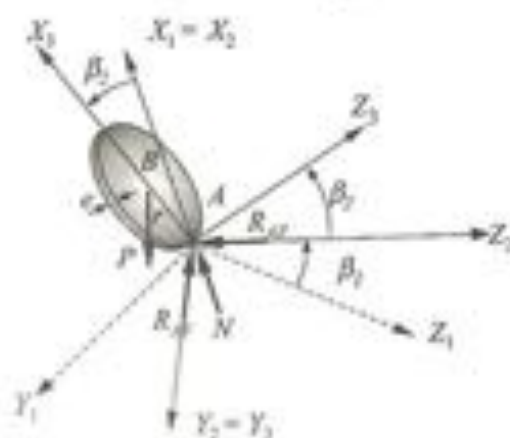


Figura 2.46
Diagrama de corpo livre da moeda.

As componentes da reação entre a moeda e o plano inclinado são descritas na base B_2 , pois é nesta base que o deslizamento da moeda é descrito com maior simplicidade e clareza.

$$\begin{aligned}
 {}_{B_2}\mathbf{R} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ R_{AY} \\ R_{AZ} \end{Bmatrix} & {}_{B_2}\mathbf{N} &= \begin{Bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 {}_{B_2}\mathbf{P} &= \mathbf{T}_{\beta_1} \begin{bmatrix} \cos \beta_0 & \sin \beta_0 & 0 \\ -\sin \beta_0 & \cos \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -mg \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_1 & \sin \beta_1 \\ 0 & -\sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -mg \cos \beta_0 \\ mg \sin \beta_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 {}_{B_2}\mathbf{P} &= \begin{Bmatrix} -mg \cos \beta_0 \\ mg \sin \beta_0 \cos \beta_1 \\ -mg \sin \beta_0 \sin \beta_1 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Como a aceleração do centro de massa da moeda foi calculada com auxílio da base B_3 , é necessário representar as forças com auxílio desta base também:

$${}_{B_3}\mathbf{R} = \mathbf{T}_{\beta_2} {}_{B_2}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & 0 & -\sin \beta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta_2 & 0 & \cos \beta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ R_{AY} \\ R_{AZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R_{AZ} \sin \beta_2 \\ R_{AY} \\ R_{AZ} \cos \beta_2 \end{Bmatrix}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}
 {}_{B_3}\mathbf{N} &= \mathbf{T}_{\beta_2} {}_{B_2}\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N \cos \beta_2 \\ 0 \\ N \sin \beta_2 \end{Bmatrix} \\
 {}_{B_3}\mathbf{P} &= \mathbf{T}_{\beta_2} {}_{B_2}\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} -mg \cos \beta_0 \cos \beta_2 + mg \sin \beta_0 \sin \beta_1 \sin \beta_2 \\ mg \sin \beta_0 \cos \beta_1 \\ -mg \cos \beta_0 \sin \beta_2 - mg \sin \beta_0 \sin \beta_1 \cos \beta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{X3} \\ P_{Y3} \\ P_{Z3} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

7. Newton – Equilíbrio Dinâmico

$$\sum_{B_3} \mathbf{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} {}_{B_3}\mathbf{v}^* + m {}_{B_3}\mathbf{a}^*$$

$${}_{B_3}\mathbf{R} + {}_{B_3}\mathbf{P} + {}_{B_3}\mathbf{N} = m {}_{B_3}\mathbf{a}^*$$

$$\begin{Bmatrix} -R_{AZ} \sin \beta_2 \\ R_{AY} \\ R_{AZ} \cos \beta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -mg \cos \beta_0 \cos \beta_2 + mg \sin \beta_0 \sin \beta_1 \sin \beta_2 \\ mg \sin \beta_0 \cos \beta_1 \\ -mg \cos \beta_0 \sin \beta_2 - mg \sin \beta_0 \sin \beta_1 \cos \beta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N \cos \beta_2 \\ 0 \\ N \sin \beta_2 \end{Bmatrix} =$$

$$= m \begin{Bmatrix} -r\dot{\beta}_2^2 - r(\dot{\beta}_1 \sin \beta_2)^2 - 2r\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \sin \beta_2 \\ 2r\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \cos \beta_2 + r\dot{\beta}_1 \sin \beta_2 + r\dot{\beta}_3 \\ r\dot{\beta}_1^2 \sin \beta_2 \cos \beta_2 - r\dot{\beta}_2^2 + 2r\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \cos \beta_2 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo-se essas três equações (direções X3, Y3 e Z3) chega-se às expressões matemáticas para descrever as componentes das reações entre a moeda e o plano inclinado, R_{xy} , R_{xz} e N . Ressalta-se também que, se a equação de Newton tivesse sido descrita com auxílio da base móvel B2, em que as componentes da força de reação foram originalmente representadas, seus valores seriam obtidos diretamente, sem que fosse necessária a resolução de um sistema de três equações. Neste caso, a aceleração linear absoluta do centro de massa da moeda, ${}_{B1}\mathbf{a}_A$, deveria ser reescrita com o auxílio da matriz da transformação de coordenadas \mathbf{T}_{B2}^T e da base vetorial B2.

8. Euler – Equilíbrio Dinâmico

$$\sum_{(i)} {}_{B3}\mathbf{M}_A = \mathbf{I}_A \frac{d}{dt} ({}_{B3}\boldsymbol{\omega}) + {}_{B3}\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{I}_A {}_{B3}\boldsymbol{\omega}) + m {}_{B3}\mathbf{r}_{AB} \times {}_{B3}\mathbf{a}_A$$

□ (I)

$$\begin{aligned} \sum {}_{B3}\mathbf{M}_A = {}_{B3}\mathbf{r}_{AB} \times {}_{B3}\mathbf{P} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_3 & \mathbf{j}_3 & \mathbf{k}_3 \\ r & 0 & 0 \\ P_{c3} & P_{y3} & P_{z3} \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -rP_{c3} \\ rP_{y3} \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ mrg \cos \beta_0 \sin \beta_2 + mrg \sin \beta_0 \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ mrg \sin \beta_0 \cos \beta_1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

□ (II)

$${}_{B3}\boldsymbol{\omega} = {}_{B3}\boldsymbol{\Omega} + {}_{B3}\dot{\beta}_3 = \begin{Bmatrix} \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_3 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} ({}_{B3}\boldsymbol{\omega}) = {}_{B3}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{Bmatrix} \ddot{\beta}_1 \cos \beta_2 - \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \sin \beta_2 \\ \ddot{\beta}_2 \\ \ddot{\beta}_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos \beta_2 + \ddot{\beta}_3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_A = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

em que o Teorema de Steiner (Teorema dos Eixos Paralelos) já foi aplicado, resultando em

$$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}me^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}me^2 + mr^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2$$

onde "m" é a massa da moeda e "r" e "e" são o raio e a espessura, respectivamente.

Restalta-se aqui que a espessura da moeda é considerada muito fina nesta análise, e nenhum momento de reação é gerado no ponto A em torno do eixo Y_y . O termo (II) pode ser calculado como segue:

$$\mathbf{I}_A \frac{d}{dt} (\omega) = \begin{Bmatrix} I_{xx}(\ddot{\beta}_1 \cos \beta_2 - \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \sin \beta_2) \\ I_{yy} \ddot{\beta}_2 \\ I_{zz}(\ddot{\beta}_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos \beta_2 + \ddot{\beta}_3) \end{Bmatrix}$$

□ (III)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i}_3 & \mathbf{j}_3 & \mathbf{k}_3 \\ \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 & \dot{\beta}_2 & \dot{\beta}_1 \sin \beta_2 \\ I_{xx}(\dot{\beta}_1 \cos \beta_2) & I_{yy} \dot{\beta}_2 & I_{zz}(\dot{\beta}_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_3) \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{xx}(\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3) - I_{yy}(\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \sin \beta_2) \\ -I_{xx} \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 (\dot{\beta}_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_3) + I_{zz} \dot{\beta}_1^2 \cos \beta_2 \sin \beta_2 \\ \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos \beta_2 (I_{yy} - I_{xx}) \end{Bmatrix}$$

□ (IV)

$$m \begin{vmatrix} \mathbf{i}_3 & \mathbf{j}_3 & \mathbf{k}_3 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Substituindo-se os quatro termos recém-calculados na equação de Euler, chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ mrg \cos \beta_0 \sin \beta_2 + mrg \sin \beta_2 \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ mrg \sin \beta_0 \cos \beta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{xx}(\ddot{\beta}_1 \cos \beta_2 - \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \sin \beta_2) \\ I_{yy} \ddot{\beta}_2 \\ I_{zz}(\ddot{\beta}_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos \beta_2 + \ddot{\beta}_3) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} I_{zz}(\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3) - I_{yy}(\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \sin \beta_2) \\ -I_{xx} \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 (\dot{\beta}_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_3) + I_{zz} \dot{\beta}_1^2 \cos \beta_2 \sin \beta_2 \\ \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos \beta_2 (I_{yy} - I_{xx}) \end{Bmatrix}$$

Resolvendo-se o sistema com três equações chega-se às três equações de movimento, as quais descrevem os movimentos realizados pela moeda no plano inclinado:

$$\ddot{\beta}_1 = \frac{I_{xx}\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \sin \beta_2 + I_{yy}\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \sin \beta_2 - I_{zz}(\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_2\dot{\beta}_3)}{I_{xx} \cos \beta_2} \quad (2.53)$$

$$\ddot{\beta}_2 = \frac{mrg \cos \beta_0 \sin \beta_1 + mrg \sin \beta_0 \sin \beta_1 \cos \beta_2 + I_{xx}\dot{\beta}_1 \cos \beta_2 (\dot{\beta}_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_3) - I_{yy}\dot{\beta}_1^2 \cos \beta_2 \sin \beta_2}{I_{yy}} \quad (2.54)$$

$$\ddot{\beta}_3 = \frac{mrg \sin \beta_0 \cos \beta_1 - I_{zz}(\dot{\beta}_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \cos \beta_2) + \dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \cos \beta_2 (I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} \quad (2.55)$$

Essas equações são equações diferenciais de segunda ordem não lineares. A solução delas só é possível numericamente. Depois de resolvê-las, pode-se calcular as reações entre a moeda e o plano inclinado. Para que a moeda não escorregue, a seguinte condição entre as componentes da força de reação entre a moeda e o plano inclinado deve ser respeitada:

$$\sqrt{R_{AY}^2 + R_{AZ}^2} \leq \mu_{din} \|N\|$$

onde μ_{din} é o coeficiente de atrito dinâmico entre o plano inclinado e a moeda.

9. Resolução Numérica das Equações de Movimento da Moeda no Plano Inclinado – Programa em Matlab (veja CD-ROM)

% Programa numérico para resolução das equações de movimento
% da moeda num plano inclinado, em ambiente Matlab.

```
clear all;
close all;
```

% Geometria e massa da moeda

```
r = 0.100;           % raio da moeda [m]
e = 0.005;           % espessura da moeda [m]
rho = 7800;          % densidade do material [Kg/m^3]
m = rho*pi*r^2*e;    % massa da moeda [Kg]
```

% Momentos de inércia de massa da moeda em relação ao ponto A

```
Ixx=1/4*m*r^2+1/12*m*e^2; % [Kg.m^2]
Iyy=1/4*m*r^2+1/12*m*e^2+m*r^2; % [Kg.m^2]
Izz=1/2*m*r^2+m*r^2; % [Kg.m^2]
```

% Definição das constantes

```
time_max = 3.0;      % tempo de integração [s]
deltaT = 0.0001;    % passo de integração [s]
n_integ = time_max/deltaT; % número total de pontos
b0 = 3/180*pi;      % ângulo de inclinação do plano beta 0 [rad]
h0 = 0.5;           % altura inicial do moeda sobre o plano [m]
g = 9.81;           % aceleração gravitacional [m/s^2]
```

```

%
% Condições Iniciais de movimento
b1 = 0.0/180*pi; % ângulo inicial beta 1 [rad]
b2 = 1.0/180*pi; % ângulo inicial beta 2 [rad]
b3 = 0.0/180*pi; % ângulo inicial beta 3 [rad]
b1p = 0.0/180*pi; % velocidade angular inicial beta 1 ponto [rad/s]
b2p = -1.0/180*pi; % velocidade angular inicial beta 2 ponto [rad/s]
b3p = 1*360/180*pi; % velocidade angular inicial beta 3 ponto [rad/s]
%
%
%Resolução Numérica

% Condições Iniciais armazenadas nos vetores
beta1(1) = b1*180/pi; % ângulo inicial beta 1 [grau]
beta2(1) = b2*180/pi; % ângulo inicial beta 2 [grau]
beta3(1) = b3*180/pi; % ângulo inicial beta 3 [grau]
beta1p(1) = b1p*180/pi; % velocidade angular inicial beta 1 ponto [grau/s]
beta2p(1) = b2p*180/pi; % velocidade angular inicial beta 2 ponto [grau/s]
beta3p(1) = b3p*180/pi; % velocidade angular inicial beta 3 ponto [grau/s]

% Matrizes de Transformação de Coordenadas
Tb0=[cos(b0) sin(b0) 0 ; -sin(b0) cos(b0) 0 ; 0 0 1];
Tb1=[ 1 0 0 ; 0 cos(b1) sin(b1); 0 -sin(b1) cos(b1)];
Tb2=[cos(b2) 0 -sin(b2); 0 1 0 ; sin(b2) 0 cos(b2)];

% Trajetória do centro da moeda descrita no sistema de referência inercial
r_l = Tb0*Tb1*Tb2*[r;b3*r;0]+[h0;0;0];

r_x(1) = r_l(1);
r_y(1) = r_l(2);
r_z(1) = r_l(3);

% Início da integração numérica
for i=1:n_integ,
    t_integ(i)=(i-1)*deltaT;

    % Acelerações angulares (equações não lineares)
    b1pp = (lxx*b1p*b2p*sin(b2)+lxy*b1p*b2p*sin(b2)-lzz*(b1p*b2p*sin(b2)+b2p*b3p))/
        (lxx*cos(b2));

    b2pp = (m*g*r*(cos(b0)*sin(b2)+sin(b0)*sin(b1)*cos(b2))+lzz*b1p*cos(b2)*
        (b1p*sin(b2)+b3p)-lxx*b1p*b1p*cos(b2)*sin(b2))/lxy;

    b3pp = (m*g*r*sin(b0)*cos(b1)-lzz*(b1pp*sin(b2)+b1p*b2p*cos(b2))+b1p*
        b2p*cos(b2)*(lzz-lxy))/lzz;

```

```

% Velocidades angulares (aproximação por Taylor)
b1p = b1p + b1pp*deltaT;
b2p = b2p + b2pp*deltaT;
b3p = b3p + b3pp*deltaT;

% Deslocamentos angulares (aproximação por Taylor)
b1 = b1 + b1p*deltaT;
b2 = b2 + b2p*deltaT;
b3 = b3 + b3p*deltaT;

% Matrizes de Transformação de Coordenadas
Tb0=[cos(b0) sin(b0) 0 ; -sin(b0) cos(b0) 0 ; 0 0 1];
Tb1=[ 1 0 0 ; 0 cos(b1) sin(b1); 0 -sin(b1) cos(b1)];
Tb2=[cos(b2) 0 -sin(b2); 0 1 0 ; sin(b2) 0 cos(b2)];

% Trajetória do centro da moeda descrita no sistema de referência inercial
r_I= Tb0*Tb1*Tb2*[r;b3*r;0]+[h0;0;0];

r_x(i+1)= r_I(1);
r_y(i+1)= r_I(2);
r_z(i+1)= r_I(3);

% Armazenamento das acelerações, velocidades e deslocamentos angulares
beta1pp(i) = b1pp*180/pi; % aceleração angular beta 1 ponto ponto [grau/s ^ 2]
beta2pp(i) = b2pp*180/pi; % aceleração angular beta 2 ponto ponto [grau/s ^ 2]
beta3pp(i) = b3pp*180/pi; % aceleração angular beta 3 ponto ponto [grau/s ^ 2]
beta1p(i+1)= b1p*180/pi; % velocidade angular beta 1 ponto [grau/s]
beta2p(i+1)= b2p*180/pi; % velocidade angular beta 2 ponto [grau/s]
beta3p(i+1)= b3p*180/pi; % velocidade angular beta 3 ponto [grau/s]
beta1(i+1) = b1*180/pi; % ângulo beta 1 [grau]
beta2(i+1) = b2*180/pi; % ângulo beta 2 [grau]
beta3(i+1) = b3*180/pi; % ângulo beta 3 [grau]

end

% Fim da integração numérica

%
%-----
%Resultados Gráficos

% (A) Deslocamentos angulares em função do tempo

figure(1)
subplot(3,1,1), plot(t_integ(1:n_integ),beta1(1:n_integ),'r')
title('MOEDA - Movimentos Angulares no Domínio do Tempo')
xlabel('tempo [s]')
ylabel('beta_1(t) [^o]')
grid
subplot(3,1,2), plot(t_integ(1:n_integ),beta2(1:n_integ),'r')

```



```

xlabel('time [s]')
ylabel('beta_2(t) [^o]')
grid
subplot(3,1,3), plot(t_integ(1:n_integ),beta3(1:n_integ),'r')
xlabel('tempo [s]')
ylabel('beta_3(t) [^o]')
grid

% (B) Velocidades angulares em função do tempo

figure(2)
subplot(3,1,1), plot(t_integ(1:n_integ),beta1p(1:n_integ),'r')
title('MOEDA - Velocidades Angulares no Dominio do Tempo')
xlabel('tempo [s]')
ylabel('beta_1p(t) [^o/s]')
grid
subplot(3,1,2), plot(t_integ(1:n_integ),beta2p(1:n_integ),'r')
xlabel('tempo [s]')
ylabel('beta_2p(t) [^o/s]')
grid
subplot(3,1,3), plot(t_integ(1:n_integ),beta3p(1:n_integ),'r')
xlabel('tempo [s]')
ylabel('beta_3p(t) [^o/s]')
grid

% (C) Acelerações angulares em função do tempo

figure(3)
subplot(3,1,1), plot(t_integ(1:n_integ),beta1pp(1:n_integ),'r')
title('MOEDA - Acelerações Angulares no Dominio do Tempo')
xlabel('tempo [s]')
ylabel('beta_1pp(t) [^o/s^2]')
grid
subplot(3,1,2), plot(t_integ(1:n_integ),beta2pp(1:n_integ),'r')
xlabel('tempo [s]')
ylabel('beta_2pp(t) [^o/s^2]')
grid
subplot(3,1,3), plot(t_integ(1:n_integ),beta3pp(1:n_integ),'r')
xlabel('tempo [s]')
ylabel('beta_3pp(t) [^o/s^2]')
grid

% (D) Trajetória do centro de massa da moeda no plano inclinado

figure(4)
plot3(r_y,r_z,r_x)
title('MOEDA - Trajetória do Centro de Massa no Plano Inclinado')
xlabel('y [m]')
ylabel('z [m]')
zlabel('x [m]')
grid
axis equal

```

10. Resultados Provenientes do Programa Computacional

Os gráficos mostrados na Figura 2.47 ilustram o comportamento dos ângulos $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ e $\beta_3(t)$ em função do tempo para as condições inicial de movimento descritas no programa computacional, ou seja: ângulo de inclinação do plano $\beta_0 = 3$ graus; ângulos iniciais $\beta_1(0) = 0$, $\beta_2(0) = 1$ grau e $\beta_3(0) = 0$; velocidades angulares iniciais $\dot{\beta}_1(0) = 0$, $\dot{\beta}_2(0) = -1$ grau/s e $\dot{\beta}_3(0) = 360$ graus/s. Ressalta-se que estes valores são convertidos em radianos e radianos por segundo, no programa. Percebem-se as oscilações dos ângulos $\beta_1(t)$ e $\beta_2(t)$, enquanto o ângulo $\beta_3(t)$ cresce continuamente, decorrente da combinação dos efeitos da aceleração gravitacional e do plano inclinado.

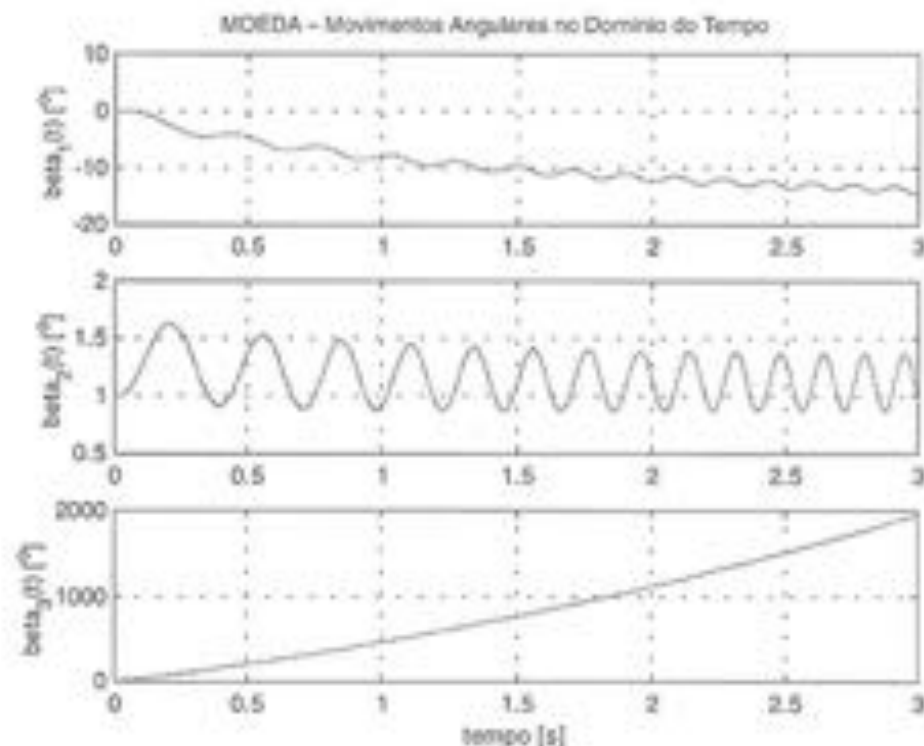


Figura 2.47

Comportamento dos ângulos $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ e $\beta_3(t)$ em função do tempo para as condições iniciais de movimento descritas no programa computacional: ângulo de inclinação do plano $\beta_0 = 3$ graus; ângulos iniciais $\beta_1(0) = 0$ grau, $\beta_2(0) = 1$ grau e $\beta_3(0) = 0$ grau; velocidades angulares iniciais $\dot{\beta}_1(0) = 0$ grau/s, $\dot{\beta}_2(0) = -1$ grau/s e $\dot{\beta}_3(0) = 360$ graus/s.

Na Figura 2.48 observa-se a trajetória realizada pelo centro de massa da moeda em função das condições iniciais de movimento descritas anteriormente. Com o programa computacional apresentado, o leitor pode simular diferentes condições iniciais de movimento e prever o comportamento da moeda no plano inclinado. Estes resultados podem então ser comparados, de forma qualitativa, com os movimentos reais realizados por uma moeda, que ele tenha no seu bolso e queira colocar em movimento sobre a mesa (plano com inclinação nula). Ao utilizar o programa, cuidados

especiais devem ser tomados com o passo de integração escolhido, pois com o aumento da velocidade da moeda decorrente da aceleração gravitacional e do plano inclinado, este passo deve ser diminuído, para que se consiga simular os movimentos da moeda de forma precisa, sem problemas de instabilidade numérica.

MOEDA – Trajetória do Centro de Massa no Plano Inclinado

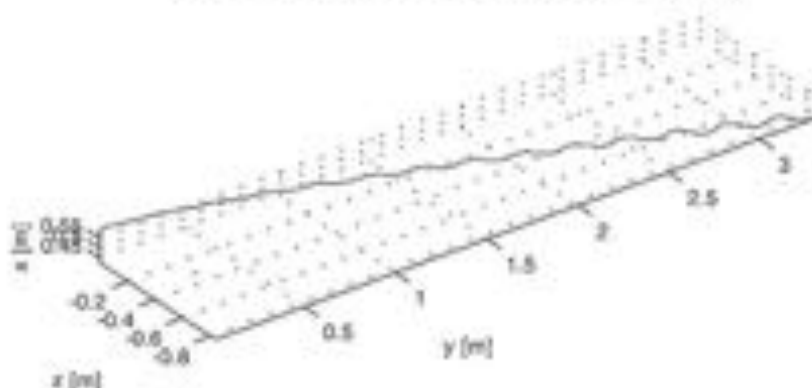


Figura 2.48

Trajetória do centro de massa da moeda calculado em função dos ângulos $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ e $\beta_3(t)$ para as condições iniciais de movimento descritas no programa computacional: ângulo de inclinação do plano $\beta_3 = 3$ graus; ângulos iniciais $\beta_1(0) = 0$ grau, $\beta_2(0) = 1$ grau e $\beta_3(0) = 0$ grau; velocidades angulares iniciais $\dot{\beta}_1(0) = 0$ graus/s, $\dot{\beta}_2(0) = -1$ graus/s e $\dot{\beta}_3(0) = 360$ graus/s.

2.12 Sistema de Múltiplos Corpos no Espaço (Equações de Movimento + Reações Dinâmicas)

Exemplo 11



Figura 2.49

Giroscópio – sistema físico utilizado na verificação dos movimentos.

O objetivo fundamental deste exemplo é a ilustração da aplicação dos ângulos de Euler na modelagem dos movimentos de um giroscópio. Ressalta-se aqui que um giroscópio nada mais é que um pião onde o momento da força peso é anulado devido aos momentos de reação aplicados pelos mancais sobre o rotor. Neste exemplo, definem-se os ângulos de precessão, nutação e spin nos respectivos sistemas móveis, chegando-se às velocidades angulares dos sistemas móveis solidários à estrutura do giroscópio e à velocidade angular absoluta do rotor do mesmo. Obtendo-se a quantidade de movimento angular do rotor descrita no sistema móvel de referência, deriva-se a mesma para igualá-la à soma dos momentos externos aplicados sobre o rotor. Faz-se, também, a somatória das forças externas aplicadas sobre o rotor, igualando-se esta à variação da quantidade de movimento linear. Chega-se, desta forma, a um sistema de equações não lineares de movimentos e às forças de reação atuantes nos pontos de apoio do rotor, ou seja, nos mancais. As equações são solucionadas numericamente e os resultados apresentados na forma de animações gráficas. Verificações experimentais qualitativas são também ilustradas (veja o CD-ROM).

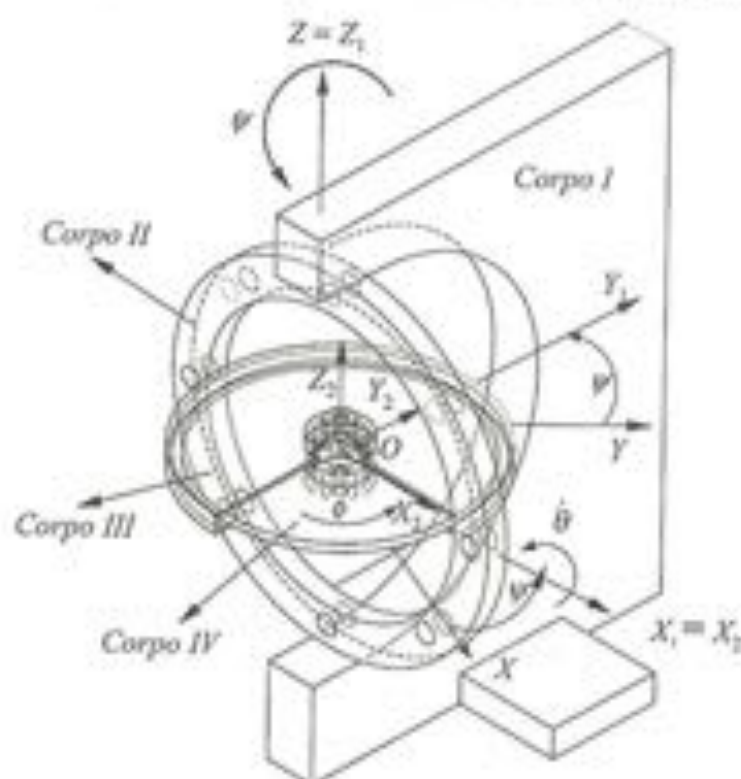


Figura 2.50
Giroscópio – modelo mecânico com os sistemas de referência, todos com origem no ponto O (cruzamento do eixo de rotação dos corpos II, III e IV).

Resolução:

1. Sistemas de referência:

- Sistema inercial I – X, Y, Z , representado pelos cursores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, solidário ao corpo I, ou seja, à base do giroscópio (origem O).

- Sistema móvel B1 – X_1, Y_1, Z_1 , representado pelos cursores $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$, solidário ao corpo II, ou seja, ao anel externo do giroscópio (origem O).
- Sistema móvel B2 – X_2, Y_2, Z_2 , representado pelos cursores $\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2$, solidário ao corpo III, ou seja, ao anel de acrílico que comporta o rotor de giroscópio. Denomina-se de corpo IV o rotor de giroscópio (origem O).

2. Rotação e matrizes de transformação de coordenadas (veja o CD-ROM):

- Rotação positiva em torno de Z inercial (precessão):

$${}_I\dot{\psi} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{T}_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}_{B1}\mathbf{s} = \mathbf{T}_\psi {}_I\mathbf{s}$$

- Rotação positiva em torno de X_1 (nutation):

$${}_{B1}\dot{\theta} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad {}_{B2}\mathbf{s} = \mathbf{T}_\theta {}_{B1}\mathbf{s}$$

- Rotação positiva em torno de Z_2 (spin ou rotação própria):

$${}_{B2}\dot{\phi} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix}$$

3. Velocidade angular absoluta dos sistemas móveis de referência:

- Sistema móvel B1:

$${}_{B1}\Omega_1 = \mathbf{T}_\psi {}_I\dot{\psi} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}$$

- Sistema móvel B2:

$$\begin{aligned} {}_{B2}\Omega_2 &= \mathbf{T}_\theta \mathbf{T}_\psi {}_I\dot{\psi} + \mathbf{T}_\theta {}_{B1}\dot{\theta} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin\theta \\ \dot{\psi} \cos\theta \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

4. *Velocidade angular absoluta dos corpos II, III e IV:*

$${}_{s_1}\omega_{II} = {}_{s_1}\Omega_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}$$

$${}_{s_2}\omega_{III} = {}_{s_2}\Omega_2 = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{Bmatrix}$$

$${}_{s_2}\omega_{IV} = {}_{s_2}\Omega_2 + {}_{s_2}\dot{\phi} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{Bmatrix}$$

5. *Aceleração angular absoluta dos corpos II, III e IV:*

$${}_{s_1}\dot{\omega}_{II} = \frac{d}{dt}({}_{s_1}\omega_{II}) + \underbrace{{}_{s_1}\Omega_1 \times}_{=0} {}_{s_1}\omega_{II} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix}$$

$${}_{s_2}\dot{\omega}_{III} = \frac{d}{dt}({}_{s_2}\omega_{III}) + \underbrace{{}_{s_2}\Omega_2 \times}_{=0} {}_{s_2}\omega_{III} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {}_{s_2}\dot{\omega}_{IV} &= \frac{d}{dt}({}_{s_2}\omega_{IV}) + {}_{s_2}\Omega_2 \times {}_{s_2}\omega_{IV} = \\ &= \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ \dot{\theta} & \dot{\psi} \sin \theta & \dot{\psi} \cos \theta \\ \dot{\theta} & \dot{\psi} \sin \theta & \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} + \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \\ \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\phi} \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\phi} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

6. *Velocidade linear absoluta do centro de massa dos corpos II, III e IV:*

$${}_I\mathbf{v}_{II}^* = 0 \quad {}_I\mathbf{v}_{III}^* = 0 \quad {}_I\mathbf{v}_{IV}^* = 0$$

7. *Aceleração linear absoluta do centro de massa dos corpos II, III e IV:*

$${}_I\mathbf{a}_{II}^* = 0 \quad {}_I\mathbf{a}_{III}^* = 0 \quad {}_I\mathbf{a}_{IV}^* = 0$$

8. DCL – Diagrama de Corpo Livre:

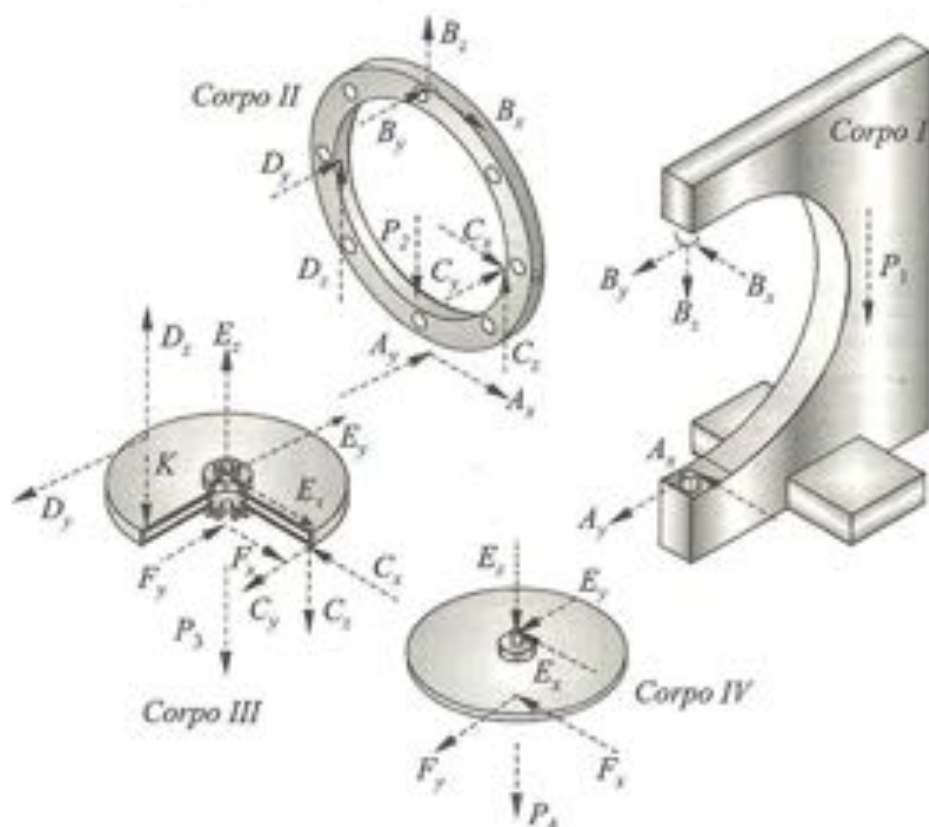


Figura 2.51

Diagrama de corpo livre – ação e reação entre os corpos II, III e IV.

9. Equilíbrio dinâmico – Newton-Euler.

□ Corpo II:

$$\sum {}_m \mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m {}_m \mathbf{v}_N) = \underbrace{m {}_m \mathbf{v}_N}_{=0} + \underbrace{m {}_m \mathbf{a}_N}_{=0} = 0$$

$${}_m \mathbf{A} + {}_m \mathbf{B} + {}_m \mathbf{C} + {}_m \mathbf{D} + \mathbf{T}_{\varphi} \mathbf{P}_N = 0$$

$$\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

$$\sum {}_m \mathbf{M}_{c_g} = \mathbf{I}_N \frac{d}{dt} ({}_m \boldsymbol{\omega}_N) + {}_m \boldsymbol{\Omega}_N \times (\mathbf{I}_N \cdot {}_m \boldsymbol{\omega}_N)$$

$$\begin{aligned} \sum {}_{s1} \mathbf{M}_{O2} &= {}_{s1} \mathbf{r}_{OA} \times {}_{s1} \mathbf{A} + {}_{s1} \mathbf{r}_{OB} \times {}_{s1} \mathbf{B} + {}_{s1} \mathbf{r}_{OC} \times {}_{s1} \mathbf{C} + {}_{s1} \mathbf{r}_{OD} \times {}_{s1} \mathbf{D} \\ {}_{s1} \mathbf{r}_{OA} \times {}_{s1} \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & -r \\ A_x & A_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} rA_y \\ -rA_x \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}_{s1} \mathbf{r}_{OB} \times {}_{s1} \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & r \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -rB_y \\ rB_x \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}_{s1} \mathbf{r}_{OC} \times {}_{s1} \mathbf{C} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ r & 0 & 0 \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -rC_z \\ rC_y \end{bmatrix} \\ {}_{s1} \mathbf{r}_{OD} \times {}_{s1} \mathbf{D} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ -r & 0 & 0 \\ 0 & D_y & D_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ rD_z \\ -rD_y \end{bmatrix} \\ \mathbf{I}_U \frac{d}{{}_U dt} ({}_{s1} \boldsymbol{\omega}_N) &= \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{zz} \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ {}_{s1} \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{I}_U \cdot {}_{s1} \boldsymbol{\omega}_N) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ 0 & 0 & \dot{\psi} \\ 0 & 0 & I_{zz} \dot{\psi} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} rA_y \\ -rA_x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -rB_y \\ rB_x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -rC_z \\ rC_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ rD_z \\ -rD_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{zz} \dot{\psi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde "r" é a distância do centro do corpo II até o ponto de aplicação das forças A, B, C e D.

□ *Corpo III*

$$\sum {}_{s2} \mathbf{F} = 0$$

$$\mathbf{T}_0(-{}_{s1} \mathbf{C}) + \mathbf{T}_0(-{}_{s1} \mathbf{D}) + {}_{s2} \mathbf{E} + {}_{s2} \mathbf{F} + \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_v \mathbf{P}_{III} = 0$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -C_x \\ -C_y \\ -C_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -D_y \\ -D_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{Bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_{III}g \end{Bmatrix} = 0 \\
 & \begin{Bmatrix} -C_x \\ -C_y \cos \theta - C_z \sin \theta \\ C_y \sin \theta - C_z \cos \theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -D_y \cos \theta - D_z \sin \theta \\ D_y \sin \theta - D_z \cos \theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_{III}g \sin \theta \\ -m_{III}g \cos \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.58)
 \end{aligned}$$

$$\sum {}_{B2} \mathbf{M}_{cx} = \mathbf{I}_{III} \frac{d}{dt} ({}_{B2} \boldsymbol{\omega}_{III}) + {}_{B2} \boldsymbol{\Omega}_2 \times (\mathbf{I}_{III} \cdot {}_{B2} \boldsymbol{\omega}_{III})$$

$$\sum {}_{B2} \mathbf{M}_{cx} = {}_{B2} \mathbf{r}_{OC} \times (-{}_{B2} \mathbf{C}) + {}_{B2} \mathbf{r}_{OD} \times (-{}_{B2} \mathbf{D}) + {}_{B2} \mathbf{r}_{OE} \times {}_{B2} \mathbf{E} + {}_{B2} \mathbf{r}_{OF} \times {}_{B2} \mathbf{F}$$

$${}_{B2} \mathbf{r}_{OC} \times (-{}_{B2} \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ r & 0 & 0 \\ -C_x & -(C_y \cos \theta + C_z \sin \theta) & (C_y \sin \theta - C_z \cos \theta) \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -r(C_y \sin \theta - C_z \cos \theta) \\ -r(C_y \cos \theta + C_z \sin \theta) \end{Bmatrix}$$

$${}_{B2} \mathbf{r}_{OD} \times (-{}_{B2} \mathbf{D}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ -r & 0 & 0 \\ 0 & -(D_y \cos \theta + D_z \sin \theta) & (D_y \sin \theta - D_z \cos \theta) \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ r(D_y \sin \theta - D_z \cos \theta) \\ r(D_y \cos \theta + D_z \sin \theta) \end{Bmatrix}$$

$${}_{B2} \mathbf{r}_{OE} \times {}_{B2} \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ 0 & 0 & h \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -hE_y \\ hE_x \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_{B2} \mathbf{r}_{OF} \times {}_{B2} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ 0 & 0 & -h \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} hF_y \\ -hF_x \\ 0 \end{Bmatrix}$$

onde "h" é a distância do centro do corpo III até o ponto de aplicação das forças E e F.

$$\mathbf{I}_{III} \frac{d}{dt} ({}_{B2} \boldsymbol{\omega}_{III}) = \begin{bmatrix} I_{x_{III}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_{III}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_{III}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} I_{x_{III}} \\ I_{y_{III}} (\ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) \\ I_{z_{III}} (\ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
{}_{B2}\Omega_2 \times (I_{B2} \cdot {}_{B2}\omega_{B2}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ \dot{\theta} & \dot{\psi} \sin \theta & \dot{\psi} \cos \theta \\ I_{xx} \dot{\theta} & I_{yy} \dot{\psi} \sin \theta & I_{zz} \dot{\psi} \cos \theta \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta (I_{zz} - I_{yy}) \\ \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta (I_{xx} - I_{zz}) \\ \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta (I_{yy} - I_{xx}) \end{Bmatrix} \\
&\begin{Bmatrix} 0 \\ -r(C_y \sin \theta - C_z \cos \theta) \\ -r(C_y \cos \theta + C_z \sin \theta) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ r(D_y \sin \theta - D_z \cos \theta) \\ r(D_y \cos \theta + D_z \sin \theta) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -hE_x \\ hE_y \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} hF_x \\ -hF_y \\ 0 \end{Bmatrix} = \\
&= \begin{Bmatrix} \dot{\theta} I_{xx} \\ I_{yy} (\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) \\ I_{zz} (\dot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta (I_{zz} - I_{yy}) \\ \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta (I_{xx} - I_{zz}) \\ \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta (I_{yy} - I_{xx}) \end{Bmatrix} \quad (2.59)
\end{aligned}$$

□ *Corpo IV:*

$$\sum {}_{B2}\mathbf{F}_{IV} = \mathbf{0}$$

$$(-{}_{B2}\mathbf{E}) + (-{}_{B2}\mathbf{F}) + \mathbf{T}_B \mathbf{T}_V \mathbf{P}_{IV} = \mathbf{0}$$

$$\begin{Bmatrix} -E_x \\ -E_y \\ -E_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -F_x \\ -F_y \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_{IV}g \sin \theta \\ -m_{IV}g \cos \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.60)$$

$$\sum {}_{B2}\mathbf{M}_{Ox} = I_{IV} \frac{d}{{dt}} ({}_{B2}\omega_{IV}) + {}_{B2}\Omega_2 \times (I_{IV} \cdot {}_{B2}\omega_{IV})$$

$$\sum {}_{B2}\mathbf{M}_{Ox} = {}_{B2}\mathbf{r}_{Ox} \times (-{}_{B2}\mathbf{E}) + {}_{B2}\mathbf{r}_{Ox} \times (-{}_{B2}\mathbf{F})$$

$${}_{B2}\mathbf{r}_{Ox} \times (-{}_{B2}\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ 0 & 0 & h \\ -E_x & -E_y & -E_z \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} hE_y \\ -hE_x \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_{B2}\mathbf{r}_{Ox} \times (-{}_{B2}\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ 0 & 0 & -h \\ -F_x & -F_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -hF_y \\ hF_x \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_N \frac{d}{dt} (\mathbf{x}_2 \omega_N) &= \begin{bmatrix} I_{NN} & 0 & 0 \\ 0 & I_{NN} & 0 \\ 0 & 0 & I_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta} I_{NN} \\ I_{NN} (\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) \\ I_{NN} (\dot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\phi}) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{x}_2 \Omega_2 \times (\mathbf{I}_N \cdot \mathbf{x}_2 \omega_N) &= \begin{bmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ \dot{\theta} & \dot{\psi} \sin \theta & \dot{\psi} \cos \theta \\ I_{NN} \dot{\theta} & I_{NN} \dot{\psi} \sin \theta & I_{NN} (\dot{\psi} \cos \theta + \ddot{\phi}) \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta (I_{NN} - I_{NN}) - I_{NN} \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta (I_{NN} - I_{NN}) - I_{NN} \ddot{\phi} \\ \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta (I_{NN} - I_{NN}) \end{bmatrix} \\
 \text{Logo:} & \\
 \begin{bmatrix} hE_y \\ -hE_x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -hF_y \\ hF_x \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{NN} \ddot{\theta} \\ I_{NN} (\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) \\ I_{NN} (\dot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\phi}) \end{bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta (I_{NN} - I_{NN}) - I_{NN} \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta (I_{NN} - I_{NN}) - I_{NN} \ddot{\phi} \\ \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta (I_{NN} - I_{NN}) \end{bmatrix} \quad (2.61)
 \end{aligned}$$

Agrupando todas as equações de 2.56 a 2.61, chega-se a um sistema de 18 equações. Têm-se 15 incógnitas, que são as forças dinâmicas de reação nos pontos A, B, C, D e E. As três equações restantes são as três equações de movimento para os ângulos de precessão, nutação e spin. Ilustra-se, mais uma vez, que os produtos finais do método de Newton e Euler são: equações de movimento + forças de reação. Resumindo, tem-se:

$$A_x + B_x + C_x = 0 \quad (2.62)$$

$$A_y + B_y + C_y + D_y = 0 \quad (2.63)$$

$$B_z + C_z + D_z = m_N g \quad (2.64)$$

$$rA_x - rB_x = 0 \quad (2.65)$$

$$-rA_x + rB_x - rC_z + rD_z = 0 \quad (2.66)$$

$$rC_y - rD_y - I_{xx} \ddot{\psi} = 0 \quad (2.67)$$

$$-C_x + E_x + F_x = 0 \quad (2.68)$$

$$-C_y \cos \theta - C_z \sin \theta - D_y \cos \theta - D_z \sin \theta + E_y + F_y = m_N g \sin \theta \quad (2.69)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_B g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_B g \sin \theta \\ m_B g \cos \theta \\ \psi^2 \sin \theta \cos \theta (I_{zzB} - I_{yyB}) \\ \psi \dot{\theta} \cos \theta (I_{zzB} + I_{yyB} - I_{xxB}) \\ \psi \dot{\theta} \sin \theta (-I_{zzB} + I_{yyB} - I_{xxB}) \\ 0 \\ m_{IV} g \sin \theta \\ m_{IV} g \cos \theta \\ \psi^2 \sin \theta \cos \theta (I_{zzV} - I_{yyV}) + I_{zzV} \psi \dot{\phi} \sin \theta \\ \psi \dot{\theta} \cos \theta (I_{zzV} + I_{yyV} - I_{xxV}) - I_{zzV} \dot{\theta} \dot{\phi} \\ \psi \dot{\theta} \sin \theta (-I_{zzV} + I_{yyV} - I_{xxV}) \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

Resolvendo-se o sistema somente para as três equações de movimento com auxílio do software MATHEMATICA, obtém-se:

▮ *Precessão:*

$$\dot{\psi} = \frac{(2\dot{\theta}(-\dot{\phi} I_{zzV} + \psi I_{zzV} \cos \theta + 2\dot{\psi} I_{zzB} \cos \theta + \dot{\psi} I_{zzV} \cos \theta - 2\dot{\psi} I_{zzB} \cos \theta - \dot{\psi} I_{zzV} \cos \theta) \sin \theta)}{(-I_{yyV} - I_{yyV} - 2I_{zzB} - I_{zzB} + I_{yyV} \cos(2\theta) + I_{yyV} \cos(2\theta) - I_{zzB} \cos(2\theta))}$$

▮ *Nutação:*

$$\dot{\theta} = \frac{(\dot{\psi}(-\dot{\phi} I_{zzV} + \psi I_{zzV} \cos \theta + \psi I_{zzV} \cos \theta - \dot{\psi} I_{zzB} \cos \theta - \dot{\psi} I_{zzV} \cos \theta) \sin \theta)}{(I_{zzB} + I_{zzV})}$$

▮ *Spin:*

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = & \left(\dot{\theta} \sin \theta (-\dot{\psi} I_{zzV} I_{zzB} - \dot{\psi} I_{zzV} I_{yyV} + \dot{\psi} I_{zzB} I_{yyV} + \dot{\psi} I_{yyV}^2 - 2\dot{\psi} I_{zzV} I_{zzB} + \right. \\ & 2\dot{\psi} I_{yyV} I_{zzB} - \dot{\psi} I_{zzV} I_{zzB} + \dot{\psi} I_{zzB} I_{zzB} - \dot{\psi} I_{zzV} I_{yyV} - 3\dot{\psi} I_{zzB} I_{yyV} - 2\dot{\psi} I_{yyV} I_{yyV} - \\ & 2\dot{\psi} I_{zzB} I_{yyV} + \dot{\psi} I_{zzB} I_{yyV} + \dot{\psi} I_{yyV}^2 + 2\dot{\theta} I_{yyV}^2 \cos \theta + \dot{\psi} I_{zzV} I_{zzB} \cos(2\theta) + \dot{\psi} I_{zzV} I_{yyV} \cos(2\theta) - \\ & \dot{\psi} I_{zzB} I_{yyV} \cos(2\theta) - \dot{\psi} I_{yyV}^2 \cos(2\theta) - \dot{\psi} I_{zzV} I_{zzB} \cos(2\theta) + \dot{\psi} I_{zzV} I_{zzB} \cos(2\theta) - \\ & \dot{\psi} I_{zzV} I_{yyV} \cos(2\theta) - \dot{\psi} I_{zzB} I_{yyV} \cos(2\theta) + \dot{\psi} I_{zzB} I_{yyV} \cos(2\theta) + \dot{\psi} I_{yyV}^2 \cos(2\theta)) / \\ & \left. (I_{zzB} (-I_{yyV} - I_{yyV} - 2I_{zzB} - I_{zzB} + I_{yyV} \cos(2\theta) + I_{yyV} \cos(2\theta) - I_{zzB} \cos(2\theta))) \right) \end{aligned}$$

De posse das equações de movimento para os corpos que compõem o giroscópio, a "atitude" dos mesmos pode ser estudada, ou seja, o comportamento dos ângulos de precessão, nutação e spin. Um programa computacional é escrito para integrar estas equações de movimentos para diferentes condições operacionais. Seus resultados numéricos são armazenados em arquivos e lidos por um programa de animação gráfica. Os resultados numéricos podem, então, ser visualizados através das animações e verificados em sala de aula com auxílio de um protótipo (veja o CD-ROM).



Figura 2.52
Vetor fixado ao corpo III do giroscópio
 $w^S = \{0 \ 0 \ 1\}^T$.

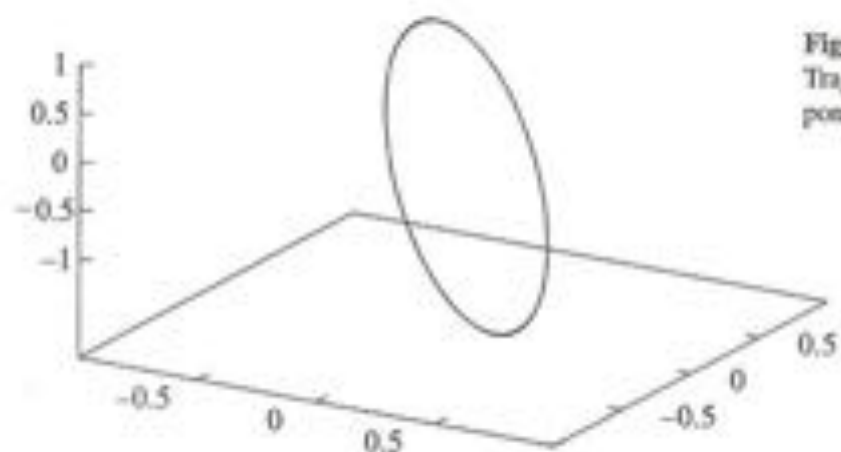


Figura 2.53
Trajetória realizada pela
ponta do vetor quando $\phi = 0$.

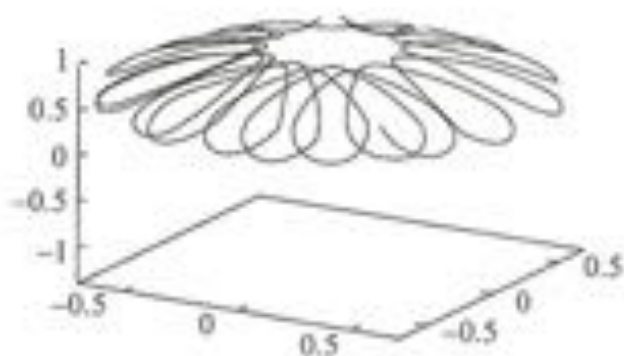


Figura 2.54
Trajetória realizada pela ponta do vetor
quando $\dot{\phi} = 5\pi$ [rad/s].

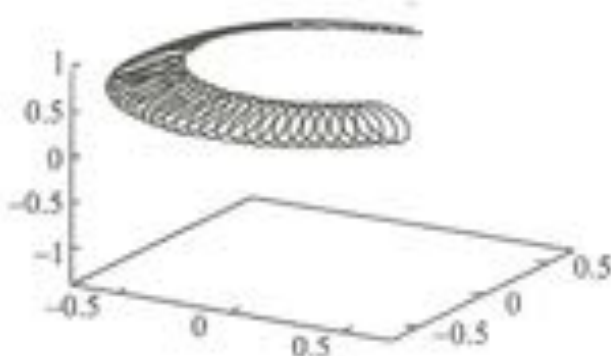


Figura 2.55
Trajetória realizada pela ponta do vetor
quando $\dot{\phi} = 20\pi$ [rad/s].

Os gráficos mostrados nas Figuras 2.53, 2.54 e 2.55 ilustram a trajetória descrita no sistema inercial pela ponta do vetor $\underline{s} = [0\ 0\ 1]^T$ fixado ao corpo do giroscópio em três condições distintas: uma quando o rotor interno está parado ($\dot{\phi} = 0$), a outra quando o rotor (corpo IV) tem uma velocidade inicial pequena ($\dot{\phi} = 5\pi$ [rad/s]) e última com o rotor girando a $\dot{\phi} = 20\pi$ [rad/s]. Ressalta-se que as condições iniciais de movimento para as simulações são sempre as mesmas ($\psi = \pi/4$ [rad], $\theta = \pi/4$ [rad]), $\phi = 0$, $\dot{\psi} = 0$, $\dot{\theta} = 1$ [rad/s], exceto para o spin $\dot{\phi}$. Observa-se que, quando o rotor interno do giroscópio gira, os movimentos de precessão e nutação passam a ser acoplados, gerando uma órbita espacial de forma espiral. Quanto maior for o spin, maior será o número de espiras realizadas em um mesmo tempo. Se algum mecanismo de dissipação de energia (atrito) fosse introduzido na modelagem matemática, essas espiras iriam se fechando. Como o sistema é conservativo, sem forças e momentos de atrito e de perdas, o movimento permanece com a mesma amplitude.

2.13 Sistema de Múltiplos Corpos no Espaço sem Deslizamento (Cinemática)

Exemplo 12

Para projetar um sistema de controle para o braço de robô mostrado na Figura 2.56, com o objetivo de equilibrar o movimento do rotor, é preciso, antes de mais nada, conhecer a dinâmica do sistema robô-rotor.

As distâncias l_1 entre os pontos O_1 e O_2 , l_2 entre os pontos O_2 e O_3 e l_3 entre os pontos O_3 e O_4 são conhecidas:

- O_1 = ponto de articulação (movimentos de translação do robô).
- O_2 = ponto de articulação do braço do robô.
- O_3 = ponto de apoio do rotor.
- O_4 = centro de massa do rotor.

Sabendo-se que as rotações β_1 e β_2 do braço do robô e β_3 , β_4 e β_5 do rotor são efetuadas segundo a Figura 2.55, ou seja:

- β_1 no sistema inercial I , representada por i, j, k .
- β_2 no sistema móvel $B1$, representada por i_1, j_1, k_1 .
- β_3 no sistema móvel $B2$, representada por i_2, j_2, k_2 .
- β_4 no sistema móvel $B3$, representada por i_3, j_3, k_3 .
- β_5 no sistema móvel $B4$, representada por i_4, j_4, k_4 .

e que os movimentos de translação X e Y também são possíveis, pede-se:

1. Calcule as matrizes de transformação de coordenadas:
 - T_{B1} , do inercial I para a base móvel $B1$,
 - T_{B2} , da base móvel $B1$ para a base móvel $B2$,
 - T_{B3} , da base móvel $B2$ para a base móvel $B3$,
 - T_{B4} , da base móvel $B3$ para a base móvel $B4$.
2. Calcule a velocidade angular absoluta do braço do robô descrevendo-a com o auxílio da base móvel $B2$, ou seja, ${}_{B2}\omega_R$.
3. Calcule a velocidade angular do sistema móvel $B4$ de referência (X_4, Y_4, Z_4) , o qual coincide com o eixo de simetria do rotor, representando esta velocidade no sistema móvel $B4$, ou seja, ${}_{B4}\Omega$.
4. Calcule a velocidade angular absoluta do rotor, descrevendo-a com auxílio da base móvel $B4$, ou seja, ${}_{B4}\omega_R$.
5. Calcule a velocidade linear absoluta do ponto O_4 , representada com auxílio da base móvel $B2$, ou seja, ${}_{B2}v_{O4}$.

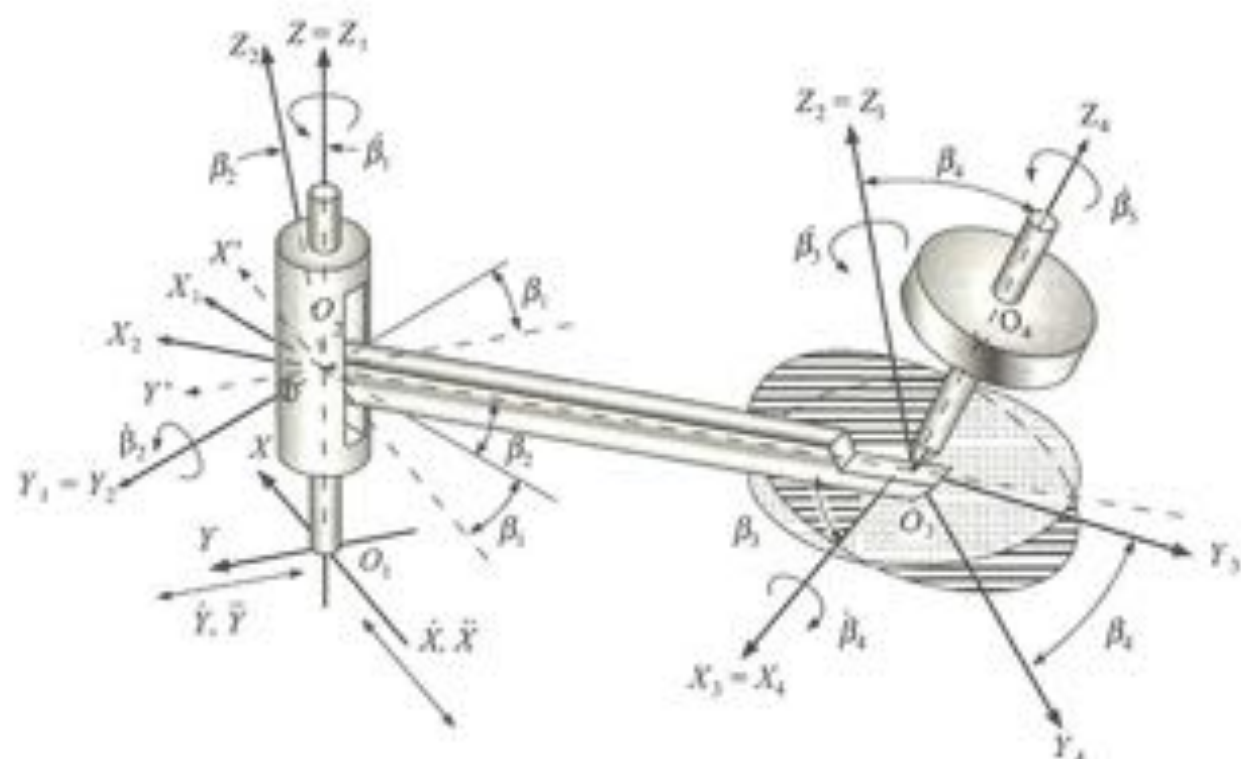


Figura 2.56
Robô equilibrando um pêlo.

6. Calcule a velocidade linear absoluta do ponto O_4 , centro de massa do rotor, representando-a no sistema móvel BA , ou seja, ${}_{BA}\mathbf{v}_{O_4}$

Despreze a inércia e a massa do eixo do rotor e considere somente a massa do rotor m_2 [kg], cujo disco tem diâmetro ϕ_2 [m] e espessura e_2 [m]. Valores a serem atribuídos aos parâmetros geométricos do sistema:

$$l_1 = 0,200 \text{ m}, \quad l_2 = 0,200 \text{ m}, \quad e_2 = 0,040 \text{ m}$$

$$l_3 = 0,400 \text{ m}, \quad \phi_2 = 0,150 \text{ m}$$

Suponha que na constante dos cálculos você já conheça os seguintes parâmetros:

$$\beta_1 = \pi/6 \text{ rad}, \quad \dot{\beta}_1 = 0,100 \text{ rad/s}, \quad \ddot{\beta}_1 = 0 \text{ rad/s}^2$$

$$\beta_2 = \pi/6 \text{ rad}, \quad \dot{\beta}_2 = 0,100 \text{ rad/s}, \quad \ddot{\beta}_2 = 0 \text{ rad/s}^2$$

$$\beta_3 = \pi/4 \text{ rad}, \quad \dot{\beta}_3 = 0,100 \text{ rad/s}, \quad \ddot{\beta}_3 = 0 \text{ rad/s}^2$$

$$\beta_4 = \pi/4 \text{ rad}, \quad \dot{\beta}_4 = 0,100 \text{ rad/s}, \quad \ddot{\beta}_4 = 0 \text{ rad/s}^2$$

$$\beta_5 = 0 \text{ rad}, \quad \dot{\beta}_5 = 10,000 \text{ rad/s}, \quad \ddot{\beta}_5 = 0 \text{ rad/s}^2$$

$$X = 0, \quad \dot{X} = 0,5 \text{ m/s}, \quad \ddot{X} = -0,2 \text{ m/s}^2$$

$$Y = 0, \quad \dot{Y} = 0,5 \text{ m/s}, \quad \ddot{Y} = -0,2 \text{ m/s}^2$$

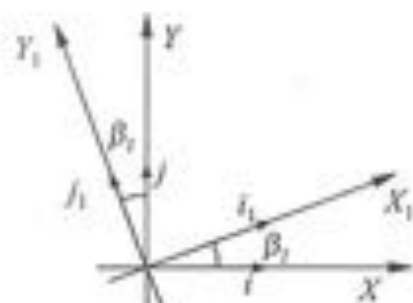
Resolução**1. Matrizes de transformação de coordenadas:**

Figura 2.57
Rotação positiva de $B1$ em torno de Z .

$${}_{01}\dot{\beta}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,100 \end{Bmatrix} \text{ [rad / s]}$$

$$T_{\beta_1} = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & \sin \beta_1 & 0 \\ -\sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,866 & 0,500 & 0 \\ -0,500 & 0,866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

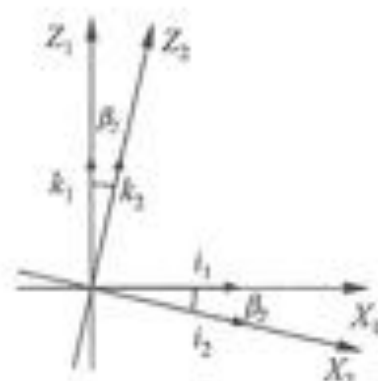


Figura 2.58
Rotação positiva de $B2$ em torno de Y .

$${}_{01}\dot{\beta}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,100 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ [rad / s]}$$

$$T_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & 0 & -\sin \beta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta_2 & 0 & \cos \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,866 & 0 & -0,500 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,500 & 0 & 0,866 \end{bmatrix}$$

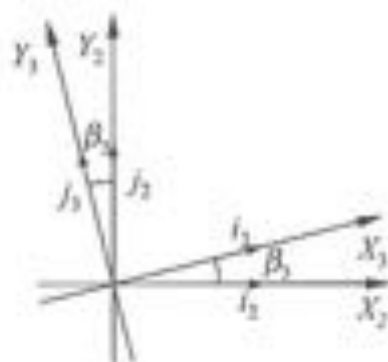


Figura 2.59
Rotação positiva de B3 em torno de Z_1

$${}_{02}\dot{\beta}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,000 \end{Bmatrix} \text{ [rad/s]}$$

$$\mathbf{T}_{\beta_3} = \begin{bmatrix} \cos \beta_3 & \sin \beta_3 & 0 \\ -\sin \beta_3 & \cos \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,707 & 0,707 & 0 \\ -0,707 & 0,707 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

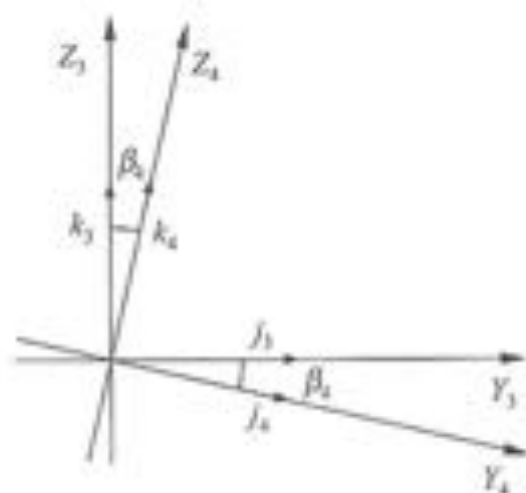


Figura 2.60
Rotação negativa de B4 em torno de X_1

$${}_{03}\dot{\beta}_4 = \begin{Bmatrix} -\dot{\beta}_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,100 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ [rad/s]}$$

$$\mathbf{T}_{\beta_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_4 & -\sin \beta_4 \\ 0 & \sin \beta_4 & \cos \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,707 & -0,707 \\ 0 & 0,707 & 0,707 \end{bmatrix}$$

$${}_{B4}\dot{\beta}_5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10,000 \end{Bmatrix} \text{ [rad / s]}$$

2. Velocidade angular do braço do robô, representada com auxílio da base B2:

$${}_{B2}\omega_B = \mathbf{T}_{\beta_2} \mathbf{T}_{\beta_1} \dot{\beta}_1 + \mathbf{T}_{\beta_2} \dot{\beta}_2 = \mathbf{T}_{\beta_2} (\mathbf{T}_{\beta_1} \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & 0 & -\sin \beta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta_2 & 0 & \cos \beta_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \cos \beta_1 & \sin \beta_1 & 0 \\ -\sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \beta_2 & 0 & -\sin \beta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta_2 & 0 & \cos \beta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow {}_{B2}\omega_B = \begin{Bmatrix} -\dot{\beta}_1 \sin \beta_2 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,050 \\ 0,100 \\ 0,087 \end{Bmatrix} \text{ [rad / s]}$$

3. Velocidade angular absoluta do sistema B4, representada com auxílio da base B4:

$${}_{B4}\Omega = \mathbf{T}_{\beta_4} \mathbf{T}_{\beta_3} \mathbf{T}_{\beta_2} \mathbf{T}_{\beta_1} \dot{\beta}_1 + \mathbf{T}_{\beta_4} \mathbf{T}_{\beta_2} \mathbf{T}_{\beta_1} \dot{\beta}_2 + \mathbf{T}_{\beta_4} \mathbf{T}_{\beta_3} \dot{\beta}_3 + \mathbf{T}_{\beta_4} \dot{\beta}_4 =$$

$$= \mathbf{T}_{\beta_4} \mathbf{T}_{\beta_1} \left(\underbrace{\mathbf{T}_{\beta_2} \mathbf{T}_{\beta_1} \dot{\beta}_1 + \mathbf{T}_{\beta_2} \dot{\beta}_2}_{{}_{B2}\omega_B} + \dot{\beta}_3 \right) + \mathbf{T}_{\beta_4} \dot{\beta}_4 =$$

$$= \mathbf{T}_{\beta_4} \left\{ \mathbf{T}_{\beta_1} ({}_{B2}\omega_B + \dot{\beta}_3) + \dot{\beta}_4 \right\}$$

$$= \mathbf{T}_{\beta_4} \left\{ \begin{bmatrix} \cos \beta_3 & \sin \beta_3 & 0 \\ -\sin \beta_3 & \cos \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dot{\beta}_1 \sin \beta_2 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 + \dot{\beta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\dot{\beta}_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_4 & -\sin \beta_4 \\ 0 & \sin \beta_4 & \cos \beta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dot{\beta}_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \dot{\beta}_2 \sin \beta_3 - \dot{\beta}_4 \\ \dot{\beta}_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 + \dot{\beta}_2 \cos \beta_3 \\ \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 + \dot{\beta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}_{B4}\Omega = \begin{Bmatrix} -\dot{\beta}_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \dot{\beta}_2 \sin \beta_3 - \dot{\beta}_4 \\ \dot{\beta}_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \dot{\beta}_2 \cos \beta_3 \cos \beta_4 - \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 \sin \beta_4 - \dot{\beta}_3 \sin \beta_4 \\ \dot{\beta}_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 + \dot{\beta}_2 \cos \beta_3 \sin \beta_4 + \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 \cos \beta_4 + \dot{\beta}_3 \cos \beta_4 \end{Bmatrix} \quad (2.81)$$

Substituindo-se os valores, tem-se:

$${}_{B4}\Omega = \begin{Bmatrix} -0,100 \cdot 0,500 \cdot 0,707 + 0,100 \cdot 0,707 - 0,100 \\ 0,100 \cdot 0,500 \cdot 0,707^2 + 0,100 \cdot 0,707^2 - 0,100 \cdot 0,866 \cdot 0,707 - 1,000 \cdot 0,707 \\ 0,100 \cdot 0,500 \cdot 0,707^2 + 0,100 \cdot 0,707^2 + 0,100 \cdot 0,866 \cdot 0,707 + 1,000 \cdot 0,707 \end{Bmatrix}$$

$${}_{B4}\Omega = \begin{Bmatrix} -0,065 \\ -0,693 \\ 0,843 \end{Bmatrix} \text{ [rad / s]}$$

4. Velocidade angular absoluta do rotor, representada com auxílio da base B4:

$$\begin{aligned} {}_{B4}\omega_R &= \mathbf{T}_{\beta_4} \mathbf{T}_{\beta_3} \mathbf{T}_{\beta_2} \mathbf{T}_{\beta_1} \dot{\beta}_1 + \mathbf{T}_{\beta_4} \mathbf{T}_{\beta_3} \mathbf{T}_{\beta_2} \dot{\beta}_2 + \mathbf{T}_{\beta_4} \mathbf{T}_{\beta_3} \dot{\beta}_3 + \mathbf{T}_{\beta_4} \dot{\beta}_4 + \dot{\beta}_5 \\ &= {}_{B4}\Omega + \dot{\beta}_5 \end{aligned}$$

$${}_{B4}\omega_R = \begin{Bmatrix} -\dot{\beta}_1 \sin \beta_2 \cos \beta_3 + \dot{\beta}_2 \sin \beta_3 - \dot{\beta}_4 \\ \dot{\beta}_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \cos \beta_4 + \dot{\beta}_2 \cos \beta_3 \cos \beta_4 - \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 \sin \beta_4 - \dot{\beta}_3 \sin \beta_4 \\ \dot{\beta}_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3 \sin \beta_4 + \dot{\beta}_2 \cos \beta_3 \sin \beta_4 + \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 \cos \beta_4 + \dot{\beta}_3 \cos \beta_4 + \dot{\beta}_5 \end{Bmatrix} \quad (2.82)$$

Substituindo-se os valores, tem-se:

$${}_{B4}\omega_R = \begin{Bmatrix} -0,065 \\ -0,0693 \\ 10,843 \end{Bmatrix} \text{ [rad/s]}$$

5. Velocidade linear absoluta do ponto O_2 , representada com auxílio da base B2:

$${}_{B2}\mathbf{v}_{O2} = {}_{B2}\mathbf{v}_{O2} + {}_{B2}\omega_B \times {}_{B2}\mathbf{l}_2 + {}_{B2}\mathbf{v}_{B2}$$

$${}_{I}\mathbf{v}_{O2} = \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow {}_{B2}\mathbf{v}_{O2} = \mathbf{T}_{\beta_2} \mathbf{T}_{\beta_1} {}_{I}\mathbf{v}_{O2} \Rightarrow$$

$${}_{B2}\mathbf{v}_{O2} = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & 0 & -\sin \beta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta_2 & 0 & \cos \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & \sin \beta_1 & 0 \\ -\sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & 0 & -\sin \beta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta_2 & 0 & \cos \beta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \cos \beta_1 + \dot{Y} \sin \beta_1 \\ -\dot{X} \sin \beta_1 + \dot{Y} \cos \beta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{X} \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{Y} \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ -\dot{X} \sin \beta_1 + \dot{Y} \cos \beta_1 \\ \dot{X} \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{Y} \sin \beta_1 \sin \beta_2 \end{Bmatrix}$$

$${}_{B2}\omega_B \times {}_{B2}\mathbf{l}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ -\dot{\beta}_1 \sin \beta_2 & \dot{\beta}_2 & \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 \\ -l_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dot{\beta}_1 l_2 \cos \beta_2 \\ \dot{\beta}_2 l_2 \end{Bmatrix}$$

${}_{B2}\mathbf{v}_{Rel} = \frac{d}{dt}({}_{B2}\mathbf{l}_2) = \mathbf{0}$; o sistema móvel B2 está fixo no braço do robô. O ponto O_2 e o ponto O_3 estão fixos no braço do robô, portanto $d/dt({}_{B2}\mathbf{l}_2) = \mathbf{0} = {}_{B2}\mathbf{v}_{Rel}$

$${}_{B2}\mathbf{v}_{O3} = \begin{Bmatrix} \dot{X} \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{Y} \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ -\dot{X} \sin \beta_1 + \dot{Y} \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 l_2 \cos \beta_2 \\ \dot{X} \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{Y} \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_2 l_2 \end{Bmatrix} \quad [m/s]$$

Substituindo-se os valores, tem-se:

$${}_{B2}\mathbf{v}_{O3} = \begin{Bmatrix} 0,500 \cdot 0,866^2 + 0,500^2 \cdot 0,866 \\ -0,500^2 + 0,500 \cdot 0,866 - 0,100 \cdot 0,400 \cdot 0,500 \\ 0,500^2 \cdot 0,866 + 0,500^3 + 0,100 \cdot 0,400 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,591 \\ 0,148 \\ 0,382 \end{Bmatrix} \quad [m/s]$$

$${}_{B2}\mathbf{v}_{O3} = \begin{Bmatrix} 0,591 \\ 0,148 \\ 0,382 \end{Bmatrix} \quad [m/s]$$

6. Velocidade linear absoluta do ponto O_4 representada com auxílio da base B4, assumindo-se que o rotor não desliza sobre o braço do robô:

$${}_{B4}\mathbf{v}_{O4} = {}_{B4}\mathbf{v}_{O3} + {}_{B4}\boldsymbol{\Omega} \times {}_{B4}\mathbf{l}_3 + {}_{B4}\mathbf{v}_{Rel}$$

$${}_{B4}\mathbf{v}_{O3} = \mathbf{T}_{\beta_4} \mathbf{T}_{\beta_3} {}_{B2}\mathbf{v}_{O3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_4 & -\sin \beta_4 \\ 0 & \sin \beta_4 & \cos \beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta_3 & \sin \beta_3 & 0 \\ -\sin \beta_3 & \cos \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}_{B2}\mathbf{v}_{O3}$$

$${}_{B4}\mathbf{v}_{O3} = \begin{bmatrix} \cos \beta_3 & \sin \beta_3 & 0 \\ -\sin \beta_3 \cos \beta_4 & \cos \beta_3 \cos \beta_4 & -\sin \beta_4 \\ -\sin \beta_3 \sin \beta_4 & \cos \beta_3 \sin \beta_4 & \cos \beta_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X} \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{Y} \sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ -\dot{X} \sin \beta_1 + \dot{Y} \cos \beta_1 - \dot{\beta}_1 l_2 \cos \beta_2 \\ \dot{X} \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{Y} \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_2 l_2 \end{Bmatrix} \quad (2.83)$$

Substituindo-se os valores, tem-se:

$${}_{B4}\mathbf{v}_{O3} = \begin{bmatrix} 0,707 & 0,707 & 0 \\ -0,500 & 0,500 & -0,707 \\ -0,500 & 0,500 & 0,707 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,591 \\ 0,148 \\ 0,382 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,522 \\ -0,492 \\ 0,049 \end{Bmatrix} \quad [m/s]$$

$$\begin{vmatrix} i_4 & j_4 & k_4 \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ 0 & 0 & l_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Omega_y l_3 \\ -\Omega_x l_3 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,693 \cdot 0,200 \\ 0,065 \cdot 0,200 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,139 \\ 0,013 \\ 0 \end{vmatrix} \quad [m/s]$$

$${}_{B4} \mathbf{v}_{B4} = {}_{B4} \dot{\beta}_5 \times {}_{B4} l_3 = \begin{vmatrix} i_4 & j_4 & k_4 \\ 0 & 0 & \dot{\beta}_5 \\ 0 & 0 & l_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad [m/s]$$

$$\Rightarrow {}_{B4} \mathbf{v}_{O4} = \begin{vmatrix} 0,522 \\ -0,492 \\ 0,049 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -0,139 \\ 0,013 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow {}_{B4} \mathbf{v}_{O4} = \begin{vmatrix} 0,383 \\ -0,479 \\ 0,049 \end{vmatrix} [m/s]$$

2.14 Obtenção das Equações de Movimento sem Passar pelo Cálculo das Reações Dinâmicas

Em muitas situações práticas, necessita-se somente das equações de movimento dos sistemas mecânicos, para que estudos sobre estabilidade, ou projetos otimizados de sistema de controle, ou cálculo de frequências naturais ou níveis de vibração, sejam conduzidos. Para estes casos não é necessário calcular as reações dinâmicas nos apoios. Visando obter diretamente as equações de movimento para sistemas compostos por vários corpos rígidos faz-se uso, aqui, do princípio da potência virtual, ou princípio de Jourdain. Ressalta-se aqui que os produtos finais do Método Newton-Euler-Jourdain são apenas as equações de movimento, um vez que as forças e momentos de reação não realizam trabalho (Princípio do Trabalho Virtual - D'Alembert) nem geram potência (Princípio de Jourdain).

As forças e momentos aplicados sobre um corpo rígido podem ser divididos em *passivos* e *ativos*. Forças passivas são aquelas que não realizam trabalho, como por exemplo as forças e momentos de reação \mathbf{R} e \mathbf{M}_r , enquanto as forças e os momentos ativos \mathbf{F}_e e \mathbf{M}_e realizam. Lembra-se aqui que parte de todas as forças aplicadas sobre um corpo é anulada pelas forças de reação, o que foi chamado por Bernoulli (1700-1782) de forças "perdidas". A outra parcela é utilizada para variar a quantidade de movimento do corpo. Assim, imaginando-se um plano onde um corpo é obrigado a realizar determinada trajetória, a reação normal do plano sobre o corpo estará sempre perpendicular a sua trajetória. Exatamente por isto, a força normal não realiza trabalho, e é chamada de força "perdida" ou "passiva".

Reescrevendo-se a equação de Newton e Euler, tem-se:

$$\sum_j \mathbf{R} + \sum_j \mathbf{F}_e = m \mathbf{a}^*$$

$$\sum_B \mathbf{M}_{OR} + \sum_B \mathbf{M}_{OE} = \mathbf{I}_O \cdot \frac{d}{dt} ({}_B \boldsymbol{\omega}) + {}_B \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_O \cdot {}_B \boldsymbol{\omega}) + m {}_B \mathbf{r}_O^* \times {}_B \mathbf{a}_O$$

Isolando-se as forças e momentos de reação, tem-se:

$$\sum_i \mathbf{R} = m_i \mathbf{a}^* - \sum_i \mathbf{F}_E$$

$$\sum_B \mathbf{M}_{OE} = I_O \cdot \frac{d}{dt}({}_B \boldsymbol{\omega}) + {}_B \boldsymbol{\Omega} \times (I_O \cdot {}_B \boldsymbol{\omega}) + m {}_B \mathbf{r}_O^* \times {}_B \mathbf{a}_O - \sum_B \mathbf{M}_{OE}$$

Calculando-se os vetores de deslocamento "virtual" $\Delta \delta$ e $\Delta \delta^E$, com pequenas amplitudes, exatamente na direção em que o movimento do corpo pode acontecer, ou seja, respeitando-se as equações de vínculo, sabe-se que esses vetores são vetores são perpendiculares às forças e momentos de reações. Logo, o produto escalar desses vetores pelos vetores de reação se anula:

$$\Delta_i \delta^T \cdot \sum_i \mathbf{R} = \Delta_i \delta^T \cdot (m_i \mathbf{a}^* - \sum_i \mathbf{F}_E) = 0$$

$$\Delta_B \delta^E T \cdot \sum_B \mathbf{M}_{OE} = \Delta_B \delta^E T \cdot \left(I_O \cdot \frac{d}{dt}({}_B \boldsymbol{\omega}) + {}_B \boldsymbol{\Omega} \times (I_O \cdot {}_B \boldsymbol{\omega}) + m {}_B \mathbf{r}_O^* \times {}_B \mathbf{a}_O - \sum_B \mathbf{M}_{OE} \right) = 0$$

Somando-se o trabalho "virtual" realizado pelas forças e momentos de reação chega-se a:

$$\begin{aligned} & \Delta_i \delta^T \cdot (m_i \mathbf{a}^* - \sum_i \mathbf{F}_E) + \\ & + \Delta_B \delta^E T \cdot \left(I_O \cdot \frac{d}{dt}({}_B \boldsymbol{\omega}) + {}_B \boldsymbol{\Omega} \times (I_O \cdot {}_B \boldsymbol{\omega}) + m {}_B \mathbf{r}_O^* \times {}_B \mathbf{a}_O - \sum_B \mathbf{M}_{OE} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.84)$$

Fazendo-se uso agora não mais dos vetores de deslocamento virtual, mas sim dos vetores de velocidade virtual $\Delta \dot{\delta}$ e $\Delta \dot{\delta}^E$, tem-se o princípio da potência virtual formulado por Jourdain:

$$\begin{aligned} & \Delta_i \dot{\delta}^T \cdot (m_i \mathbf{a}^* - \sum_i \mathbf{F}_E) + \\ & + \Delta_B \dot{\delta}^E T \cdot \left(I_O \cdot \frac{d}{dt}({}_B \boldsymbol{\omega}) + {}_B \boldsymbol{\Omega} \times (I_O \cdot {}_B \boldsymbol{\omega}) + m {}_B \mathbf{r}_O^* \times {}_B \mathbf{a}_O - \sum_B \mathbf{M}_{OE} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.85)$$

Observando-se as Equações 2.79 e 2.80, detecta-se o desaparecimento das forças de reação e a obtenção direta das equações de movimento do corpo rígido. O único problema agora fica sendo como determinar os vetores $\Delta \dot{\delta}$ e $\Delta \dot{\delta}^E$, de tal forma que estes sejam perpendiculares às forças e momentos de reação. Sabe-se que estes vetores devem respeitar as condições de vínculo, ou seja, estes vetores só variam nas direções em que se têm graus de liberdade. Assim, definindo-se o vetor \mathbf{q} , composto pelas coordenadas dos graus de liberdade do sistema mecânico, ou o vetor $\dot{\mathbf{q}}$ composto pelas coordenadas mínimas de velocidade, calculam-se os vetores de deslocamento ou velocidade "virtuais" derivando-os em relação aos graus de liberdade do corpo. A seguir, definem-se as etapas para este cálculo.

– Definição dos graus de liberdade do corpo rígido – os movimentos de um corpo rígido livre (sem vínculos) no espaço são descritos por seis coordenadas: três de translação e três de rotação, ou seja,

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}^T \text{ (no espaço)}$$

ou

$$\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6\}^T \text{ (no espaço)}$$

Cada grau de liberdade só pode ser restringido através de uma força ou momento de reação. Assim, para cada grau de liberdade restringido tem-se um nova força ou momento de reação, os quais podem ser calculados com auxílio do Método Newton-Euler. Para restringir os movimentos de um corpo apenas a um plano, necessita-se de dois momentos e uma força. Sobram, então, três graus de liberdade, dois de translação e um de rotação, ou seja:

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}^T \text{ (no plano)}$$

ou

$$\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3\}^T \text{ (no plano)}$$

Caso vínculos adicionais sejam utilizados, novas forças de reação ou momentos são necessários para que os movimentos do corpo obedeçam às equações de vínculo. Restringem-se, então, outros graus de liberdade e têm-se, como resultado, novas forças ou novos momentos de reação para serem calculados. Deve-se sempre ter em mente que, para cada grau de liberdade restringido, ou seja, uma equação de movimento a menos, tem-se uma nova força ou momento de reação para ser calculado.

- Cálculo dos vetores de deslocamento virtual ou velocidade virtual: sabe-se que esses vetores de velocidade só variam nas direções dos graus de liberdade do corpo. Logo, estes podem ser obtidos quando as derivadas dos mesmos em relação aos graus de liberdade do sistema são calculadas. Caso exista mais de um grau de liberdade, estes vetores $\Delta_{\mathbf{x}}^T$ e $\Delta_{\mathbf{v}}^T$ transformam-se em matrizes, as quais são geralmente chamadas de **jacobiano de translação** \mathbf{J}_t^T e **jacobiano de rotação** \mathbf{J}_r^T , dados por:

$$\mathbf{J}_t = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial v_x}{\partial \dot{q}_2} & \frac{\partial v_x}{\partial \dot{q}_3} & \frac{\partial v_x}{\partial \dot{q}_4} & \frac{\partial v_x}{\partial \dot{q}_5} & \frac{\partial v_x}{\partial \dot{q}_6} \\ \frac{\partial v_y}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial v_y}{\partial \dot{q}_2} & \frac{\partial v_y}{\partial \dot{q}_3} & \frac{\partial v_y}{\partial \dot{q}_4} & \frac{\partial v_y}{\partial \dot{q}_5} & \frac{\partial v_y}{\partial \dot{q}_6} \\ \frac{\partial v_z}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial v_z}{\partial \dot{q}_2} & \frac{\partial v_z}{\partial \dot{q}_3} & \frac{\partial v_z}{\partial \dot{q}_4} & \frac{\partial v_z}{\partial \dot{q}_5} & \frac{\partial v_z}{\partial \dot{q}_6} \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$J_n = \left(\frac{\partial {}_B \omega}{\partial \dot{q}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{q}_2} & \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{q}_3} & \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{q}_4} & \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{q}_5} & \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{q}_6} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{q}_2} & \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{q}_3} & \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{q}_4} & \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{q}_5} & \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{q}_6} \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{q}_1} & \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{q}_2} & \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{q}_3} & \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{q}_4} & \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{q}_5} & \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{q}_6} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Substituindo-se esses jacobianos na Equação 2.80, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial {}_I \mathbf{v}^*}{\partial \dot{q}} \right)^T (m {}_I \mathbf{a}^* - \sum {}_I \mathbf{F}_E) + \\ & + \left(\frac{\partial {}_B \omega}{\partial \dot{q}} \right)^T \left(\mathbf{I}_B \cdot \frac{d}{dt} ({}_B \omega) {}_B \Omega \times (\mathbf{I}_B \cdot {}_B \omega) + m {}_B \mathbf{r}_c^* \times {}_B \mathbf{a}_c^* - \sum {}_B \mathbf{M}_{E,E} \right) = 0 \end{aligned}$$

2.15 Aplicação a Corpos Rígidos – Pião

O objetivo deste exemplo é ilustrar a aplicação do princípio de Jourdain para a obtenção das equações diferenciais de movimento. Lembre-se de que é necessário projetar as forças e os momentos externos na direção dos graus de liberdade do sistema, pois a outra parcela será cancelada pelas forças de reação. Esta projeção é feita com o auxílio dos jacobianos de translação e rotação e tendo-se em mente o princípio da potência virtual. Aqui, utiliza-se o mesmo sistema mecânico utilizado na Seção 2.10, o pião.

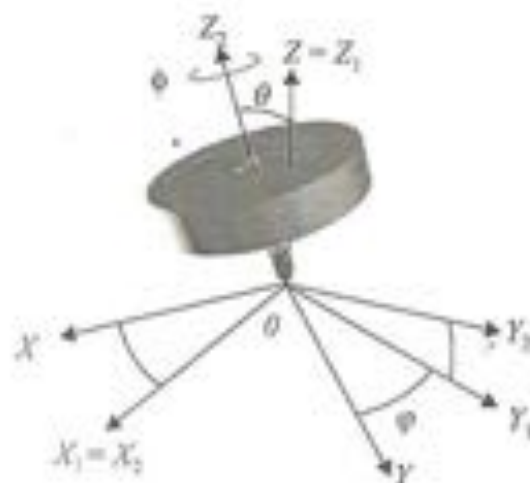


Figura 2.61

Pião – Movimentos de precessão, nutação e spin (ângulos de Euler).

No caso do pião, tem-se já calculado os seguintes vetores:

- ↳ Vetor de velocidade angular absoluta representado com auxílio da base móvel B_2 , ${}_{s_2}\Omega$:

$${}_{s_2}\Omega = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{Bmatrix} \quad [\text{rad} / \text{s}]$$

- ↳ Vetor de velocidade angular absoluta do pêlo ${}_{s_1}\omega$:

$${}_{s_1}\omega = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \quad [\text{rad} / \text{s}] \quad (2.88)$$

- ↳ Vetor de velocidade linear absoluta do centro de massa ${}_{s_1}\mathbf{v}^*$:

$${}_{s_1}\mathbf{v}^* = h \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \\ -\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} \quad [\text{m} / \text{s}] \quad (2.89)$$

- ↳ Vetor de aceleração linear absoluta do centro de massa ${}_{s_1}\mathbf{a}^*$:

$${}_{s_1}\mathbf{a}^* = h \begin{Bmatrix} 2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + \ddot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta - \ddot{\theta} \\ -\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta - \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad [\text{m} / \text{s}^2]$$

- ↳ Vetores de força e momento aplicados:

$$\sum {}_I \mathbf{F}_E = {}_I \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{Bmatrix} \Rightarrow \sum {}_{s_1} \mathbf{F}_E = {}_{s_1} \mathbf{P} = \mathbf{T}_\theta \mathbf{T}_\phi {}_I \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \sin \theta \\ -mg \cos \theta \end{Bmatrix} \quad [N]$$

$$\sum {}_{s_1} \mathbf{M}_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{Bmatrix} \quad [N \cdot m]$$

- ↳ Vetor $\dot{\mathbf{q}}$ formado pelas coordenadas mínimas de velocidade do corpo:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.90)$$

- ⇒ Cálculo dos jacobianos de translação \mathbf{J}_v e rotação \mathbf{J}_ω baseados nas Equações 2.81 e 2.82, e utilizando as Expressões 2.84, 2.85 e 2.86:

$$\mathbf{J}_v = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}({}_{B2}v^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial \dot{\phi}} & \frac{\partial v_x}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial v_x}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial v_y}{\partial \dot{\phi}} & \frac{\partial v_y}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial v_y}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial v_z}{\partial \dot{\phi}} & \frac{\partial v_z}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial v_z}{\partial \dot{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \cdot \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & -h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_\omega = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}({}_{B2}\omega) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{\phi}} & \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{\phi}} & \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{\phi}} & \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ⇒ Com o auxílio do tensor de inércia do pião, calculado em relação a seu centro de massa, $\mathbf{I}_{c\pi}$ e substituindo os termos calculados anteriormente na equação:

$$(\mathbf{J}_v)^T [m \mathbf{a}^* - \mathbf{F}_e] + (\mathbf{J}_\omega)^T \left[\mathbf{I}_{c\pi} \frac{d}{dt}({}_{B2}\omega) + {}_{B2}\Omega \times (\mathbf{I}_{c\pi} {}_{B2}\omega) - {}_{B2}\mathbf{M}_e \right] = 0$$

tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} -m_p h^2 \sin \theta (2 \cos \theta \dot{\phi} \dot{\theta} + \ddot{\phi} \sin \theta) - \cos \theta \left[\dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta (-{}_{c\pi}I_{xx} + {}_{c\pi}I_{yy} + {}_{c\pi}I_{zz}) \right] + {}_{c\pi}I_{xz} (\ddot{\phi} + \dot{\phi} \cos \theta) \\ m_p g h \sin \theta + m_p h^2 (\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta - \ddot{\theta}) \\ \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta ({}_{c\pi}I_{xz} - {}_{c\pi}I_{yy} - {}_{c\pi}I_{zz}) + {}_{c\pi}I_{xz} (\ddot{\theta} + \dot{\theta} \cos \theta) \end{array} \right\} +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M \cos \theta - \sin \theta \cdot \left[-{}_{c\pi}I_{xz} \dot{\phi} \dot{\theta} + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \cdot ({}_{c\pi}I_{xx} - {}_{c\pi}I_{yy} + {}_{c\pi}I_{zz}) + {}_{c\pi}I_{yz} \dot{\phi} \sin \theta \right] \\ \dot{\phi} \sin \theta \left[-\dot{\phi} {}_{c\pi}I_{xz} + \dot{\phi} {}_{c\pi}I_{yy} \cos \theta - \dot{\phi} {}_{c\pi}I_{zz} \cos \theta \right] - {}_{c\pi}I_{xz} \ddot{\theta} \\ M \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

em que momento externos e o tensor de inércia são calculados em relação ao centro de massa do pião. Resolvendo o sistema de equação anterior para $\ddot{\phi}$, $\ddot{\theta}$ e $\ddot{\phi}$, obtêm-se as equações de movimento do pião diretamente:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\dot{\theta}}{\sin \theta \cdot (I_{xx} + mh^2)} \cdot \left[\dot{\phi} \cdot (-I_{zz} + \dot{\varphi} \cos \theta \cdot (I_{xx} - I_{yy} - 2mh^2)) \right]$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta}{I_{xx} + mh^2} \cdot \left\{ mgh + \dot{\phi} \cdot \left[-I_{zz} \dot{\phi} + \dot{\phi} \cos \theta \cdot (I_{xx} - I_{yy} + mh^2) \right] \right\}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\dot{\theta} \dot{\phi}}{\tan \theta \cdot (I_{yy} + mh^2)} \cdot \left[-I_{zz} + \cos \theta \cdot (I_{xx} + I_{yy} - I_{zz} + 2mh^2) \right]$$

$$+ \frac{1}{I_{zz}} \cdot \left[M + \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \cdot (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) \right]$$

2.16 Equações de Movimento para um Sistema de Corpos Rígidos

Quando se constrói o diagrama de corpo livre para um sistema mecânico composto por N corpos rígidos, conectados uns aos outros através de algum vínculo, têm-se novas forças de reação entre os corpos para serem calculadas. Pensando-se em cada individualmente, não se pode dizer que essas forças de reação não realizam trabalho nem geram potência. Isto porque os movimentos dos corpos não acontecem necessariamente perpendiculares a essas forças de reação. No entanto, pensando nos pares de corpos interligados, sabe-se pela terceira lei de Newton (ação e reação) que o trabalho realizado pela força de reação em um corpo cancela o trabalho realizado por sua respectiva reação no outro corpo. Desta forma, vale para um conjunto de corpos rígidos a seguinte afirmativa:

A soma do trabalho realizado pelos pares de forças de reação entre os vários corpos que compõem um sistema mecânico é nula.

Baseado neste fato, reescreve-se o princípio de Newton-Euler-Jourdain da seguinte maneira:

$$\sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial_i \mathbf{v}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \left(-\sum_{j=1}^S \mathbf{F}_{E_j} + m_i \cdot \mathbf{a}_i \right) + \left(\frac{\partial_i \omega_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \left(-\sum_{j=1}^S \mathbf{M}_{E_j} + \mathbf{I}_{O_i} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{a}_i \omega_i) + \mathbf{a}_i \Omega \times (\mathbf{I}_{O_i} \cdot \mathbf{a}_i \omega_i) + m_i \cdot \mathbf{a}_i \mathbf{r}_{O_i} \times \mathbf{a}_i \mathbf{a}_{O_i} \right) \right] = 0 \quad (2.91)$$

em que N é o número total de corpos que compõem o sistema mecânico em estudo, P_i é o número de forças externas atuantes sobre cada corpo e S_j é o número de momentos externos atuantes sobre cada corpo.

Assim, resume-se a seguir as etapas para obter as equações de movimento para um sistema mecânico composto por N corpos rígidos:

1. Definição de sistemas de referência inercial I e móveis B_1, B_2, \dots, B_N , sendo os sistemas móveis sempre solidários aos corpos $1, 2, \dots, N$. Caso o sistema mecânico seja composto por N corpos, N sistemas móveis de referência são utilizados, ou seja, $X - Y - Z, X_1 - Y_1 - Z_1, X_2 - Y_2 - Z_2, \dots, X_N - Y_N - Z_N$, com seus respectivos versores $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}), (\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1), \dots, (\mathbf{i}_N, \mathbf{j}_N, \mathbf{k}_N)$.
2. Definição das matrizes de transformação de coordenadas dos sistemas móveis para o inercial \mathbf{T}_i e vice-versa, \mathbf{T}_i^T , com $(i = 1, 2, \dots, N)$.
3. Determinação das equações de vínculo com base em equações vetoriais fechadas.
4. Cálculo das grandezas físicas como vetores de velocidade angular absoluta dos sistemas móveis de referência ${}_R\Omega_i$ e vetores de aceleração linear absoluta ${}_R\dot{\Omega}_i$, baseado nas relações geométricas dos movimentos executados pelos corpos, tanto no plano como no espaço, obedecendo a suas restrições físicas (equações de vínculo). Ressalta-se que esses vetores são convenientemente representados com auxílio da própria base móvel B_i .
5. Cálculo das grandezas físicas como vetores de velocidade angular absoluta dos corpos ${}_R\omega_i$ e vetores de aceleração linear absoluta ${}_R\dot{\omega}_i$, baseado nas relações geométricas dos movimentos executados pelos corpos, tanto no plano como no espaço, obedecendo a suas restrições físicas (equações de vínculo). Ressalta-se que esses vetores são convenientemente representados com auxílio da própria base móvel B_i .
6. Cálculo das grandezas físicas como vetores de velocidade linear absoluta do centro de massa dos corpos ${}_R\mathbf{v}_i^*$ e vetores de aceleração linear absoluta do centro de massa dos corpos ${}_R\mathbf{a}_i^*$, com base nas relações geométricas dos movimentos executados pelos corpos, tanto no plano como no espaço, obedecendo a suas restrições físicas (equações de vínculo). Ressalta-se que esses vetores são geralmente representados com auxílio da base inercial $I, {}_I\mathbf{v}_i^*$ e ${}_I\mathbf{a}_i^*$, ou da base móvel $B_i, {}_R\mathbf{v}_i^*$ e ${}_R\mathbf{a}_i^*$.
7. Determinação das propriedades geométricas dos vários corpos que compõem o sistema mecânico, dentre elas a massa total de cada corpo m_i e o tensor de inércia \mathbf{I}_{O_i} , composto pelos momentos e produtos de inércia de massa.
8. Cálculo dos vetores de quantidade de movimento linear ${}_R\mathbf{J}_i$ do i -ésimo corpo em função da massa e da velocidade do centro de massa do corpo, $m_i \cdot {}_R\mathbf{v}_i^*$.
9. Cálculo do vetor de quantidade de movimento angular ${}_R\mathbf{H}_{O_i}$ do i -ésimo corpo baseado na velocidade angular ${}_R\omega_i$ do corpo e do tensor de inércia do corpo em relação ao ponto O escolhido.
10. Determinação de todas as forças de excitação (internas ou externas ao sistema) atuantes sobre o conjunto de corpos rígidos: $\sum_{j=1}^N {}_R\mathbf{F}_j$

11. Cálculo das equações diferenciais de movimento e das reações dinâmicas pelo Método Newton-Euler. Caso se tenha interesse somente nas equações de movimento, eliminam-se as forças de reação e calculam-se diretamente somente as equações diferenciais de movimento com base no Princípio de Jourdain. Definem-se os jacobianos de translação $\left(\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}}\right)^T$ e rotação $\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}}\right)^T$ em função de \dot{q} , vetor contendo as coordenadas mínimas de velocidade, e trabalha-se com a Equação 2.90.
12. Resolução numérica das equações diferenciais de movimento e análise dos movimentos com grandes amplitudes do sistema de corpos rígidos.
13. Linearização das equações diferenciais de movimento para o sistema de corpos e obtenção das matrizes de massa, rigidez e amortecimento. Análise dos movimentos com pequenas amplitudes, ou seja, análise de vibração, frequências naturais, modos de vibração etc.

2.17 Aplicação em Sistemas de Corpos Rígidos – Giroscópio

O objetivo deste exemplo é ilustrar a aplicação do princípio de Jourdain e a obtenção das equações diferenciais de movimento para um sistema de corpos rígidos, sem que seja necessária a representação e o cálculo das forças de reação entre os vários corpos. Aqui, utiliza-se um sistema mecânico já apresentado em itens anteriores, o giroscópio, composto por três corpos rígidos. Observou-se durante os cálculos das equações de movimento para o mesmo, pelo Método Newton-Euler, a obtenção de um sistema de 18 equações, sendo 15 reações dinâmicas e 3 equações de movimento. Estas eram responsáveis por descrever o comportamento dos ângulos de precessão, nutação e spin.

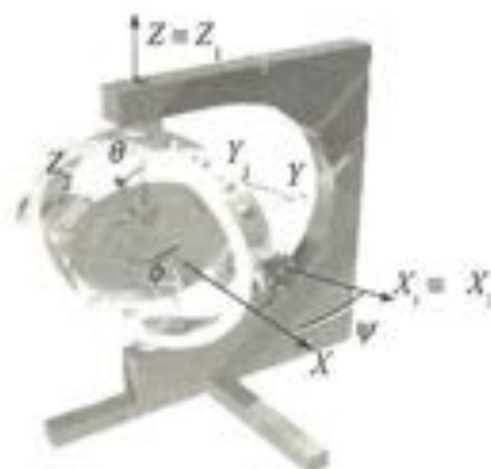


Figura 2.62

Pião – movimentos de precessão, nutação e spin (ângulos de Euler).

Velocidade angular absoluta dos sistemas móveis $B1$ e $B2$:

$${}_{s1}\Omega_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad [\text{rad} / \text{s}]$$

$${}_{s_2}\Omega_2 = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{Bmatrix} \quad [\text{rad} / \text{s}]$$

- 2 Velocidade angular absoluta dos corpos II, III e IV.

$${}_{s_1}\omega_{II} = {}_{s_1}\Omega_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad [\text{rad} / \text{s}]$$

$${}_{s_2}\omega_{III} = {}_{s_2}\Omega_2 = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{Bmatrix} \quad [\text{rad} / \text{s}]$$

$${}_{s_2}\omega_{IV} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad [\text{rad} / \text{s}]$$

- 3 Derivada da velocidade angular absoluta dos corpos II, III e IV nas respectivas bases móveis:

$$\frac{d}{dt}({}_{s_1}\omega_{II}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}({}_{s_2}\omega_{III}) = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\psi} \cos \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \end{Bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}({}_{s_2}\omega_{IV}) = \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\psi} \cos \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\phi} \end{Bmatrix}$$

- 4 Velocidade linear absoluta do centro de massa dos corpos II, III e IV.

$${}_I\mathbf{v}_{II}^* = \mathbf{0} \quad {}_I\mathbf{v}_{III}^* = \mathbf{0} \quad {}_I\mathbf{v}_{IV}^* = \mathbf{0}$$

- 5 Aceleração linear absoluta do centro de massa dos corpos II, III e IV.

$${}_I\mathbf{a}_{II}^* = \mathbf{0} \quad {}_I\mathbf{a}_{III}^* = \mathbf{0} \quad {}_I\mathbf{a}_{IV}^* = \mathbf{0}$$

- Vetor $\dot{\mathbf{q}}$ formado pelas coordenadas mínimas de velocidade dos corpos:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix}$$

- Jacobianos de translação e rotação dos corpos II, III e IV:

Ressalta-se que, pelo fato de as velocidades dos centros de massa dos corpos II, III e IV serem nulas, todos os jacobianos de translação são nulos também.

$$\mathbf{J}_{v_{II}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} ({}_I \mathbf{v}_{II}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_{x_{II}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial v_{x_{II}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial v_{x_{II}}}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial v_{y_{II}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial v_{y_{II}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial v_{y_{II}}}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial v_{z_{II}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial v_{z_{II}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial v_{z_{II}}}{\partial \dot{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{v_{III}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} ({}_I \mathbf{v}_{III}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_{x_{III}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial v_{x_{III}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial v_{x_{III}}}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial v_{y_{III}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial v_{y_{III}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial v_{y_{III}}}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial v_{z_{III}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial v_{z_{III}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial v_{z_{III}}}{\partial \dot{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{v_{IV}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} ({}_I \mathbf{v}_{IV}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_{x_{IV}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial v_{x_{IV}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial v_{x_{IV}}}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial v_{y_{IV}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial v_{y_{IV}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial v_{y_{IV}}}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial v_{z_{IV}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial v_{z_{IV}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial v_{z_{IV}}}{\partial \dot{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os jacobianos de rotação para cada um dos corpos são calculados a seguir:

$$\mathbf{J}_{\omega_{II}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} ({}_{II} \omega_{II}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_{x_{II}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial \omega_{x_{II}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \omega_{x_{II}}}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial \omega_{y_{II}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial \omega_{y_{II}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \omega_{y_{II}}}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial \omega_{z_{II}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial \omega_{z_{II}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \omega_{z_{II}}}{\partial \dot{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{\omega_{III}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} ({}_{III} \omega_{III}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_{x_{III}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial \omega_{x_{III}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \omega_{x_{III}}}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial \omega_{y_{III}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial \omega_{y_{III}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \omega_{y_{III}}}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial \omega_{z_{III}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial \omega_{z_{III}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \omega_{z_{III}}}{\partial \dot{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 \\ \cos \theta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{\omega_{IV}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} ({}_{IV} \omega_{IV}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_{x_{IV}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial \omega_{x_{IV}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \omega_{x_{IV}}}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial \omega_{y_{IV}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial \omega_{y_{IV}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \omega_{y_{IV}}}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial \omega_{z_{IV}}}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial \omega_{z_{IV}}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \omega_{z_{IV}}}{\partial \dot{\phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 2) As únicas forças externas aplicadas sobre os corpos II, III, e IV são as forças peso: ${}_{II} \mathbf{P}_{II}$, ${}_{III} \mathbf{P}_{III}$ e ${}_{IV} \mathbf{P}_{IV}$.
- 3) Com o auxílio do tensor de inércia dos corpos II, III e IV, calculado em relação ao centro de massa de cada um dos componentes, e substituindo os termos calculados anteriormente na equação:

$$\sum_{i=1}^3 \left[\underbrace{(\mathbf{J}_{\omega_i})^T}_{=0} \left(-\sum_{j=1}^3 {}_j \mathbf{F}_{E_j} + m_i \cdot \underbrace{{}_i \mathbf{a}_i}_{=0} \right) + \underbrace{(\mathbf{J}_{\omega_i})^T}_{=0} \left(-\sum_{j=1}^3 {}_j \mathbf{M}_{E_j} + I_{O_i} \cdot \frac{d}{dt} ({}_{II} \omega_i) + {}_{II} \Omega \times (I_{O_i} \cdot {}_{II} \omega_i) + \underbrace{m_i \cdot {}_{II} \mathbf{r}_{O_i} \times {}_{II} \mathbf{a}_{O_i}}_{=0} \right) \right] = 0$$

tem-se:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{J}_{\omega_B})^T \left(\mathbf{I}_{C_{AB}} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{s}_1 \omega_B) + \mathbf{s}_1 \Omega_1 \times (\mathbf{I}_{C_{AB}} \cdot \mathbf{s}_1 \omega_B) \right) + \\ & + (\mathbf{J}_{\omega_W})^T \left(\mathbf{I}_{C_{AW}} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{s}_2 \omega_W) + \mathbf{s}_2 \Omega_2 \times (\mathbf{I}_{C_{AW}} \cdot \mathbf{s}_2 \omega_W) \right) + \\ & + (\mathbf{J}_{\omega_V})^T \left(\mathbf{I}_{C_{AV}} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{s}_3 \omega_V) + \mathbf{s}_3 \Omega_3 \times (\mathbf{I}_{C_{AV}} \cdot \mathbf{s}_3 \omega_V) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.92)$$

Substituindo-se os termos calculados anteriormente na Equação 2.92 e resolvendo-se os produtos escalares e vetoriais chega-se às três equações diferenciais de movimento para o giroscópio. Isolando-se as acelerações, tem-se:

⇒ Precessão:

$$\ddot{\psi} = \frac{(2\dot{\theta}(-\dot{\phi} I_{zAV} + \dot{\psi} I_{zAW} \cos \theta + 2\dot{\psi} I_{zAW} \cos \theta + \dot{\psi} I_{zAV} \cos \theta - 2\dot{\psi} I_{zAW} \cos \theta - \dot{\psi} I_{zAV} \cos \theta) \sin \theta)}{(-I_{zAW} - I_{zAV} - 2I_{zAB} - I_{zAW} + I_{zAV} \cos(2\theta) + I_{zAV} \cos(2\theta) - I_{zAW} \cos(2\theta))}$$

⇒ Nutação:

$$\ddot{\theta} = \frac{(\dot{\psi}(-\dot{\phi} I_{zAV} + \dot{\psi} I_{zAW} \cos \theta + \dot{\psi} I_{zAV} \cos \theta - \dot{\psi} I_{zAW} \cos \theta - \dot{\psi} I_{zAV} \cos \theta) \sin \theta)}{(I_{zAW} + I_{zAV})}$$

⇒ Spin:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} = & \left(\dot{\theta} \sin \theta (-\dot{\psi} I_{zAV} I_{zAW} - \dot{\psi} I_{zAV} I_{zAV} + \dot{\psi} I_{zAW} I_{zAV} + \dot{\psi} I_{zAV}^2 - 2\dot{\psi} I_{zAV} I_{zAB} + \right. \\ & 2\dot{\psi} I_{zAV} I_{zAB} - \dot{\psi} I_{zAV} I_{zAB} + \dot{\psi} I_{zAV} I_{zAB} - \dot{\psi} I_{zAV} I_{zAV} - 3\dot{\psi} I_{zAW} I_{zAV} - 2\dot{\psi} I_{zAV} I_{zAV} - \\ & 2\dot{\psi} I_{zAV} I_{zAV} + \dot{\psi} I_{zAV} I_{zAV} + \dot{\psi} I_{zAV}^2 + 2\dot{\phi} I_{zAV} \cos \theta + \dot{\psi} I_{zAV} I_{zAB} \cos(2\theta) + \dot{\psi} I_{zAV} I_{zAV} \cos(2\theta) - \\ & \dot{\psi} I_{zAV} I_{zAV} \cos(2\theta) - \dot{\psi} I_{zAV} \cos(2\theta) - \dot{\psi} I_{zAV} I_{zAB} \cos(2\theta) + \dot{\psi} I_{zAV} I_{zAB} \cos(2\theta) - \\ & \left. \dot{\psi} I_{zAV} I_{zAV} \cos(2\theta) - \dot{\psi} I_{zAV} I_{zAV} \cos(2\theta) + \dot{\psi} I_{zAB} I_{zAV} \cos(2\theta) + \dot{\psi} I_{zAV}^2 \cos(2\theta) \right) / \\ & (I_{zAV} (-I_{zAW} - I_{zAV} - 2I_{zAB} - I_{zAW} + I_{zAV} \cos(2\theta) + I_{zAV} \cos(2\theta) - I_{zAW} \cos(2\theta))) \end{aligned}$$

Assim, ilustrou-se como calcular as equações de movimento para um sistema de corpos rígidos, sem que se tenha a necessidade de representar ou calcular as forças de reação entre os vários corpos. No princípio de Jourdain necessita-se representar somente as forças e momentos externos aplicados sobre os corpos. Ressalta-se que, pelo Método Newton-Euler-Jourdain somente produtos escalares e vetoriais são necessários para se chegar até o objetivo final: as equações de movimento. Se for necessário resolver algum sistema de equações para isolar as acelerações dos corpos (como apresentado neste exemplo), a ordem desse

sistema coincide com o número de graus de liberdade do conjunto de corpos. Já pelo Método Newton-Euler chega-se a um sistema de equações cujo tamanho depende do número de corpos presentes. Este sistema deve ser resolvido e um grande esforço computacional é gerado na manipulação simbólica das equações. Uma vez que se necessita somente das equações de movimento, é de extrema valia a utilização do princípio de Jourdain.

2.18 Aplicação em Sistemas de Corpos Rígidos – Satélite

Neste item, o método Newton-Euler-Jourdain é aplicado a um sistema mecânico de corpos rígidos, distante da grande maioria dos estudantes. O sistema em questão é um satélite composto por um corpo principal e três rotores internos dispostos ortogonalmente entre si (Weber, 1971; Anchev, 1973). O satélite, que representa um sistema de múltiplos corpos sem equações de vínculos, apresenta seis graus de liberdade, sendo três deslocamentos lineares, que definem sua órbita em torno da Terra (Kuga & Rao, 1995), e três rotações em torno de seu centro de massa, que definem sua atitude, sendo que este trabalho estará focado sobre o segundo conjunto de movimentos. Será conduzida uma análise dos resultados com o objetivo de definir como determinados parâmetros do sistema físico, entre eles a velocidade angular dos rotores e o número de rotores em funcionamento, influenciam a atitude do satélite.

O modelo mecânico para o satélite é apresentado na Figura 2.63a. É possível observar claramente os quatro corpos que o compõem. Neste modelo, ainda devem ser consideradas mais três equações de movimentos relativas aos rotores internos. Os ângulos que definem a atitude do satélite (φ_1 , φ_2 e φ_3) são apresentados na Figura 2.63b, na qual também é possível observar os sistemas móveis de referência ($B1$, $B2$ e $B3$) utilizadas para a descrição dos movimentos. Estes movimentos podem ser vistos em detalhes com as animações apresentadas no CD-ROM.

Foi considerada a existência de torques genéricos aplicados aos eixos de rotação dos rotores internos do satélite. Esses torques serão utilizados futuramente como torques de controle para atitude. Com o modelo mecânico apresentado e seus respectivos sistemas de referência (Figura 2.63) elaboram-se as etapas para a obtenção das equações não lineares de movimento a fim de descrever todos os movimentos do satélite (Santos, Ferretti & Schmidek 1997). Cada um dos quatro corpos ($N = 4$) que formam o satélite será representado por um subíndice como se segue: *corpo 1*, caixa externa (corpo principal) denotada pelo subíndice c ; *corpo 2*, rotor posicionado no eixo Z_1 denotado pelo subíndice R_1 ; *corpo 3*, rotor posicionado no eixo Y_1 denotado pelo subíndice R_2 ; *corpo 4*, rotor posicionado no eixo X_1 denotado pelo subíndice R_3 . Foram utilizados três sistemas móveis de referência para descrever todos os movimentos do satélite: X_1, Y_1, Z_1 , provenientes de uma rotação em torno do eixo X ; X_2, Y_2, Z_2 , provenientes de uma rotação em torno do eixo Y_1 ; e X_3, Y_3, Z_3 , provenientes de uma rotação em torno do eixo Z_1 . Dessa forma é necessária a definição das seguintes matrizes de transformação de coordenadas:

$$\mathbf{T}_{\varphi_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ 0 & -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_{01}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\varphi_1} {}_1\mathbf{s} \text{ ou } {}_1\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\varphi_1}^T {}_{01}\mathbf{s} \quad (2.93)$$

$$\mathbf{T}_{\varphi_2} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_{02}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\varphi_2} {}_{01}\mathbf{s} \text{ ou } {}_{01}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\varphi_2}^T {}_{02}\mathbf{s} \quad (2.94)$$

$$\mathbf{T}_{\varphi_3} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & \sin \varphi_3 & 0 \\ -\sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_{03}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\varphi_3} {}_{02}\mathbf{s} \text{ ou } {}_{02}\mathbf{s} = \mathbf{T}_{\varphi_3}^T {}_{03}\mathbf{s} \quad (2.95)$$

em que \mathbf{s} é um vetor descrito no sistema inercial, ${}_i\mathbf{s}$ são vetores descritos no i -ésimo sistema móvel de referência, \mathbf{T}_{φ_i} é a matriz que transforma a representação do vetor do $(i-1)$ -ésimo sistema móvel de referência para o i -ésimo.

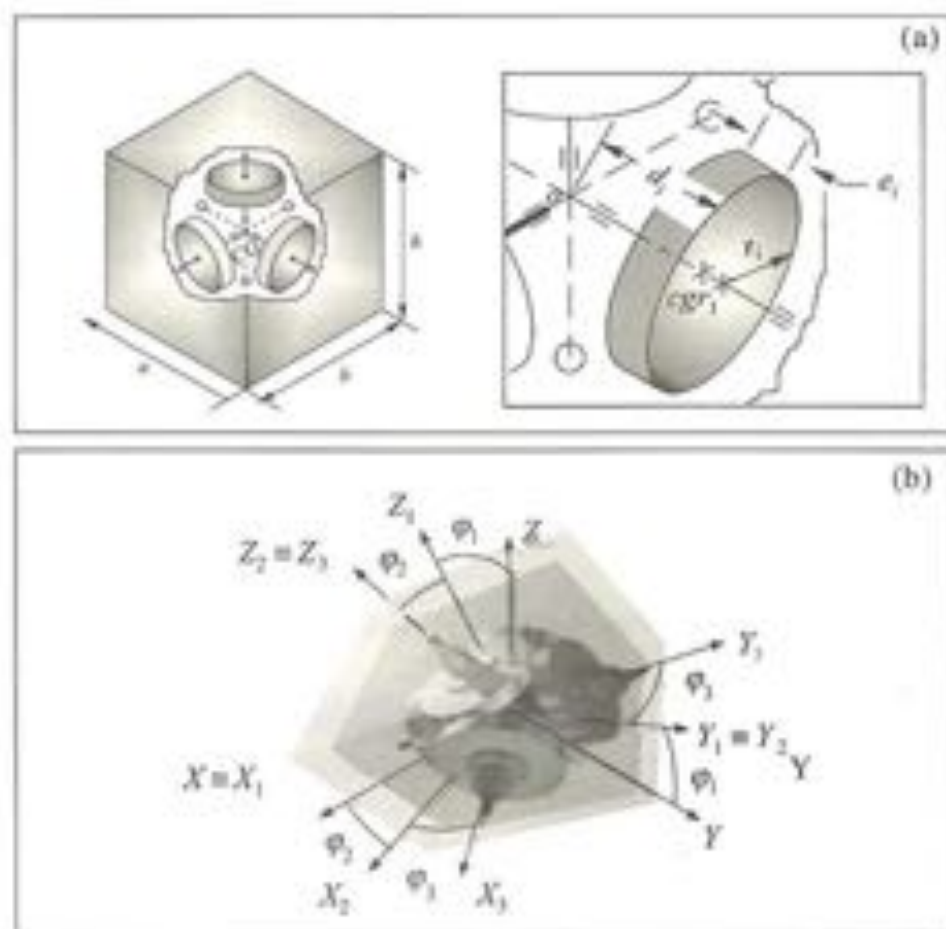


Figura 2.63

Satélite. (a) Modelo mecânico definido para o satélite. No detalhe, as dimensões dos rotores. (b) Ângulos que definem a atitude do satélite (φ_1, φ_2 e φ_3) e sistemas móveis de referência.

A velocidade angular absoluta do sistema de referência móvel $B3$ (${}_{B3}\Omega$) é definida por

$${}_{B3}\Omega = T_{\varphi_1} T_{\varphi_2} T_{\varphi_3} {}_I\dot{\varphi}_1 + T_{\varphi_3} T_{\varphi_2} {}_{B1}\dot{\varphi}_2 + T_{\varphi_3} {}_{B2}\dot{\varphi}_3 \quad (2.96)$$

em que ${}_I\dot{\varphi}_1 = \{\dot{\varphi}_1 \ 0 \ 0\}^T$, ${}_{B1}\dot{\varphi}_2 = \{0 \ \dot{\varphi}_2 \ 0\}^T$, ${}_{B2}\dot{\varphi}_3 = \{0 \ 0 \ \dot{\varphi}_3\}^T$.

As velocidades angulares absolutas do corpo do satélite e dos rotores internos podem ser descritas por

$${}_{B3}\omega_c = {}_{B3}\Omega; \quad (2.97)$$

$${}_{B3}\omega_{B1} = {}_{B3}\omega_c + {}_{B3}\dot{\varphi}_{B1}; \quad (2.98)$$

$${}_{B3}\omega_{B2} = {}_{B3}\omega_c + {}_{B3}\dot{\varphi}_{B2}; \quad (2.99)$$

$${}_{B3}\omega_{B3} = {}_{B3}\omega_c + {}_{B3}\dot{\varphi}_{B3}; \quad (2.100)$$

em que ${}_{B3}\dot{\varphi}_{B1} = \{0 \ 0 \ \dot{\varphi}_{B1}\}^T$, ${}_{B3}\dot{\varphi}_{B2} = \{0 \ \dot{\varphi}_{B2} \ 0\}^T$, ${}_{B3}\dot{\varphi}_{B3} = \{\dot{\varphi}_{B3} \ 0 \ 0\}^T$ são as rotações dos rotores internos nos respectivos eixos.

De posse das velocidades angulares absolutas é possível definir as acelerações angulares absolutas dos componentes do satélite como sendo

$${}_{B3}\dot{\omega}_c = \frac{d}{dt}({}_{B3}\omega_c) + \underbrace{{}_{B3}\Omega \times}_{=0} {}_{B3}\omega_c \quad (2.101)$$

$${}_{B3}\dot{\omega}_{B1} = \underbrace{\frac{d}{dt}({}_{B3}\omega_{B1})}_{(I)} + \underbrace{{}_{B3}\Omega \times}_{(II)} {}_{B3}\omega_{B1} \quad (2.102)$$

$${}_{B3}\dot{\omega}_{B2} = \underbrace{\frac{d}{dt}({}_{B3}\omega_{B2})}_{(I)} + \underbrace{{}_{B3}\Omega \times}_{(II)} {}_{B3}\omega_{B2} \quad (2.103)$$

$${}_{B3}\dot{\omega}_{B3} = \underbrace{\frac{d}{dt}({}_{B3}\omega_{B3})}_{(I)} + \underbrace{{}_{B3}\Omega \times}_{(II)} {}_{B3}\omega_{B3} \quad (2.104)$$

em que (I) se relaciona com a variação do vetor em termos de amplitude e (II), com a variação do vetor em termos de direção.

As velocidades lineares absolutas dos centros de massa dos quatro corpos são dadas por

$${}_I\mathbf{v}_{c/c_c} = \{v_x \ v_y \ v_z\}^T = \{0 \ 0 \ 0\}^T \quad (2.105)$$

$${}_{B3}\mathbf{v}_{c/B1} = \underbrace{{}_{B3}\mathbf{v}_{c/c_c}}_{=0} + {}_{B3}\Omega \times {}_{B3}\mathbf{r}_{c/B1} + \underbrace{\frac{d}{dt}({}_{B3}\mathbf{r}_{c/B1})}_{=0} \quad (2.106)$$

$${}_{B3}\mathbf{v}_{c/B2} = {}_{B3}\Omega \times {}_{B3}\mathbf{r}_{c/B2} \quad (2.107)$$

$${}_{B3}\mathbf{v}_{c_{B3}} = {}_{B3}\boldsymbol{\Omega} \times {}_{B3}\mathbf{r}_{c_{B3}} \quad (2.108)$$

Com as velocidades lineares já definidas, as acelerações lineares absolutas dos centros de massa dos quatro corpos podem ser obtidas através das equações

$${}_{B3}\mathbf{a}_{c_{B3}} = \{0 \ 0 \ 0\}^T \quad (2.109)$$

$${}_{B3}\mathbf{a}_{c_{B1}} = \frac{d}{dt}({}_{B3}\mathbf{v}_{c_{B1}}) + {}_{B3}\boldsymbol{\Omega} \times {}_{B3}\mathbf{v}_{c_{B1}} \quad (2.110)$$

$${}_{B3}\mathbf{a}_{c_{B2}} = \frac{d}{dt}({}_{B3}\mathbf{v}_{c_{B2}}) + {}_{B3}\boldsymbol{\Omega} \times {}_{B3}\mathbf{v}_{c_{B2}} \quad (2.111)$$

$${}_{B3}\mathbf{a}_{c_{B3}} = \frac{d}{dt}({}_{B3}\mathbf{v}_{c_{B3}}) + {}_{B3}\boldsymbol{\Omega} \times {}_{B3}\mathbf{v}_{c_{B3}} \quad (2.112)$$

Os tensores de inércia dos quatro corpos, calculados em função de sua geometria e em relação a seus respectivos centros de massa são

$${}_{B3}\mathbf{I}_c = \begin{bmatrix} {}_{c1}\mathbf{I}_{c_{c1}} & 0 & 0 \\ 0 & {}_{c2}\mathbf{I}_{c_{c2}} & 0 \\ 0 & 0 & {}_{c3}\mathbf{I}_{c_{c3}} \end{bmatrix} \text{ e } {}_{B3}\mathbf{I}_{R_j} = \begin{bmatrix} {}_{c1}J_{R_{j1}} & 0 & 0 \\ 0 & {}_{c2}J_{R_{j2}} & 0 \\ 0 & 0 & {}_{c3}J_{R_{j3}} \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

em que $j = 1, 2, 3$ rotores internos

Fazendo-se uso do método de Newton-Euler-Jourdain, não é necessária a representação das forças de reação entre os vários corpos, pois estas, aos pares, não realizam trabalho, nem potência. Portanto:

$$\sum {}_{B3}\mathbf{F}_c = \mathbf{0}, \quad \sum {}_{B3}\mathbf{F}_{R1} = \mathbf{0}, \quad \sum {}_{B3}\mathbf{F}_{R2} = \mathbf{0} \text{ e } \sum {}_{B3}\mathbf{F}_{R3} = \mathbf{0} \quad (2.114)$$

em que $\sum {}_{B3}\mathbf{F}$ representam as resultantes para cada um dos corpos definidos pelos subíndices. Como já foi dito anteriormente, há momentos externos aplicados aos rotores e, portanto, as somatórias de momentos externos atuantes sobre os quatro corpos são dadas por

$$\sum {}_{B3}\mathbf{M}_c = \mathbf{0}, \quad \sum {}_{B3}\mathbf{M}_{R1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1 \end{bmatrix}, \quad \sum {}_{B3}\mathbf{M}_{R2} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \sum {}_{B3}\mathbf{M}_{R3} = \begin{bmatrix} M_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

Para o cálculo dos jacobianos é necessário definir as coordenadas mínima de velocidade, representadas pelos vetor $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{\varphi}_1 \ \dot{\varphi}_2 \ \dot{\varphi}_3 \ \dot{\varphi}_{R1} \ \dot{\varphi}_{R2} \ \dot{\varphi}_{R3}\}^T \quad (2.116)$$

Dessa forma é possível calcular os jacobianos de translação, como apresentado a seguir:

$$\mathbf{J}_{v_c} = \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}({}_{B3}\mathbf{v}_{c_{B1}}) \right], \quad \mathbf{J}_{v_{R1}} = \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}({}_{B3}\mathbf{v}_{c_{B1}}) \right], \quad \mathbf{J}_{v_{R2}} = \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}({}_{B3}\mathbf{v}_{c_{B2}}) \right], \quad \mathbf{J}_{v_{R3}} = \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}}({}_{B3}\mathbf{v}_{c_{B3}}) \right] \quad (2.117)$$

e também os jacobianos de rotação dados a seguir:

$$\mathbf{J}_{\omega_c} = \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} (x_1 \omega_c) \right], \mathbf{J}_{\omega_n} = \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} (x_2 \omega_n) \right], \mathbf{J}_{\omega_{n1}} = \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} (x_3 \omega_{n1}) \right], \mathbf{J}_{\omega_{n2}} = \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} (x_4 \omega_{n2}) \right] \quad (2.118)$$

Substituindo todos os termos na equação de Newton-Euler-Jourdain

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}} \right)^T \left(-\sum_{j=1}^r \mathbf{F}_{E_j} + m_i \cdot \mathbf{a}_i \right) + \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{q}} \right)^T \left(-\sum_{j=1}^r \mathbf{M}_{E_{0j}} + \mathbf{I}_{0i} \cdot \frac{d}{dt} (\omega_i) + \omega_i \Omega \times (\mathbf{I}_{0i} \cdot \omega_i) + m_i \cdot \mathbf{r}_{0i} \times \mathbf{a}_{0i} \right) \right] \quad (2.119)$$

em que N é o número total de corpos que compõem o sistema mecânico em estudo, obtém-se um sistema com seis equações, que tem como solução as expressões para os seis graus de liberdade (três rotações do corpo principal e três rotações dos rotores internos) $\mathbf{A}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{b}(t)$. Integrando numericamente essas equações pode-se analisar a atitude do satélite para diferentes condições iniciais. Para facilitar a compreensão desses movimentos, a atitude será analisada através das órbitas descritas por vetores perpendiculares a três faces distintas do corpo do satélite. Esta representação permite compreender mais facilmente os movimentos espaciais realizados pelas faces do satélite e todos os objetos que forem conectados às mesmas, por exemplo, uma antena ou um telescópio.

Com as equações de movimento já determinadas, são realizadas várias simulações a fim de entender a influência dos diversos parâmetros físicos e dinâmicos sobre a atitude do satélite. O método de investigação adotado inicialmente consiste em ter apenas um rotor em funcionamento em cada simulação (três possibilidades), e as perturbações com componentes em apenas uma direção de cada vez (três possibilidades), resultando, desta forma, em nove combinações (3×3) de condições iniciais diferentes.

O tempo de simulação para cada condição foi de 1.200 segundos, e o passo de integração foi de 10^{-5} s.

Os resultados, apresentados graficamente na Figura 2.64, mostram a trajetória descrita por pontos no centro de cada face do corpo do satélite. De posse dos resultados nota-se claramente que, para condições iniciais de velocidade em torno do eixo de rotação do rotor em funcionamento, têm-se grandes deslocamentos nas outras faces, ou seja, para estes casos o satélite não oferece nenhum tipo de resistência às perturbações. Pode-se notar também que o ponto no centro da face ortogonal ao eixo de rotação do rotor não apresenta deslocamentos, como pode ser visto na Figura 2.64(a).

Para perturbações de velocidades em torno dos eixos não coincidentes com o eixo de rotação do rotor, observa-se um maior resistência da conjunto, já que os deslocamentos são de pequena amplitude nas direções ortogonais ao eixo de rotação dos rotores da Figura 2.64(b) e Figura 2.64(c). Entretanto, para esses casos, a direção coincidente com o eixo de rotação do rotor agora apresenta deslocamentos de pequena grandeza. Isso ocorre devido ao acoplamento da direções quando há rotores em funcionamento.

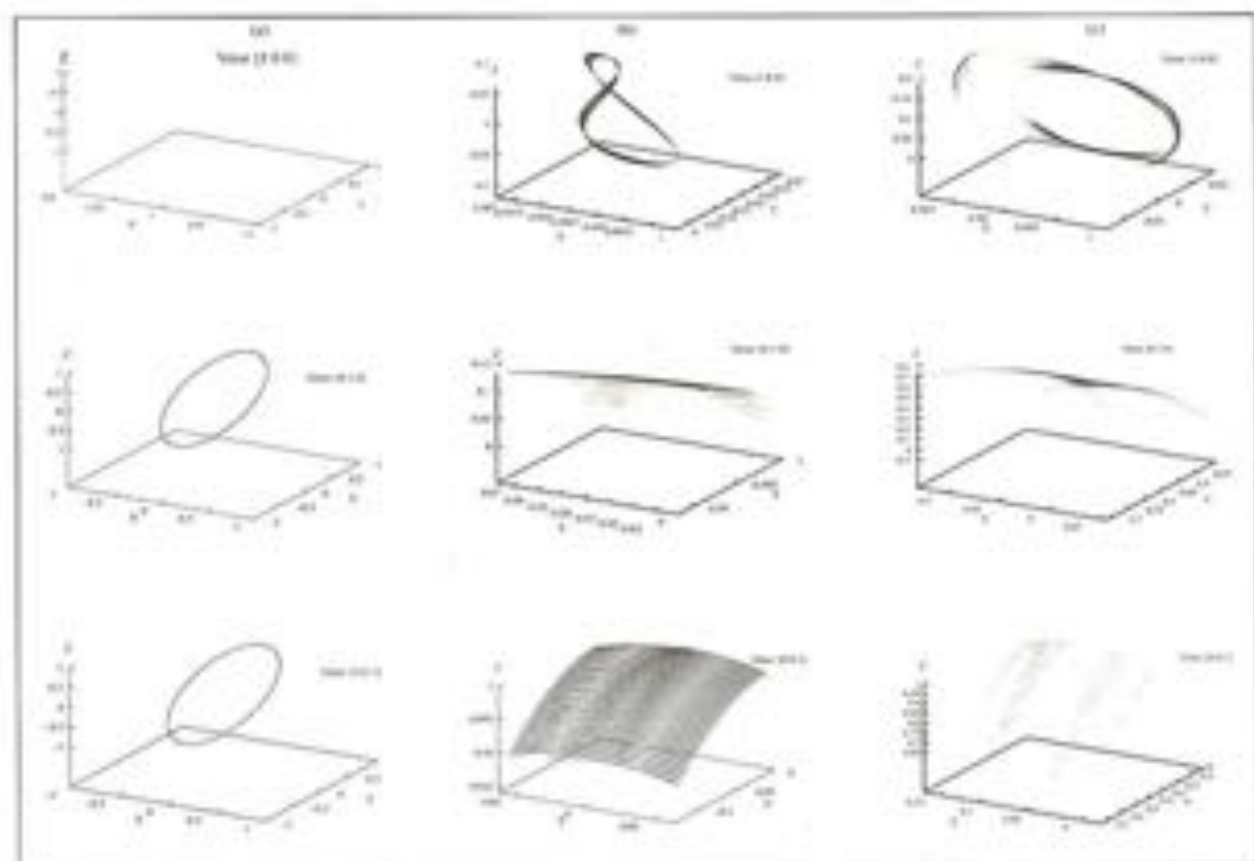


Figura 2.64

Órbitas descritas por vetores ortogonais ao centro de cada face do satélite. Estas trajetórias são resultados das simulações em que apenas um rotor interno na direção X_1 está em funcionamento ($\phi_{x1} = 0$ [rad] e $\dot{\phi}_{x1} = 35$ [rad/s]) enquanto os demais estão em repouso ($\phi_{x2} = 0$ [rad] e $\dot{\phi}_{x2} = 0$ [rad/s], $\phi_{x3} = 0$ [rad] e $\dot{\phi}_{x3} = 0$ [rad/s]) com as seguintes perturbações iniciais: (a) $\phi_1 = 0$ [rad], $\dot{\phi}_1 = 0,01$ [rad/s], $\phi_2 = 0$ [rad], $\dot{\phi}_2 = 0$ [rad/s], $\phi_3 = 0$ [rad] e $\dot{\phi}_3 = 0$ [rad/s]; (b) $\phi_1 = 0$ [rad], $\dot{\phi}_1 = 0$ [rad/s], $\phi_2 = 0$ [rad], $\dot{\phi}_2 = 0,01$ [rad/s], $\phi_3 = 0$ [rad] e $\dot{\phi}_3 = 0$ [rad/s]; (c) $\phi_1 = 0$ [rad], $\dot{\phi}_1 = 0$ [rad/s], $\phi_2 = 0$ [rad], $\dot{\phi}_2 = 0$ [rad/s], $\phi_3 = 0$ [rad] e $\dot{\phi}_3 = 0,01$ [rad/s].

Continuando com a investigação da influência de alguns parâmetros sobre a atitude do satélite, foram realizadas simulações com os três rotores em funcionamento ($\dot{\phi}_{x1} = 35$ [rad/s], $\dot{\phi}_{x2} = 35$ [rad/s] e $\dot{\phi}_{x3} = 35$ [rad/s]), com as mesmas perturbações iniciais das simulações anteriores. O resultado é apresentado na Figura 2.65. Neste caso nota-se que as trajetórias são semelhantes em qualquer direção, o que não acontecia anteriormente. Isso pode ser atribuído ao forte acoplamento de movimentos ocasionado pelo maior número de rotores em funcionamento. Vê-se, entretanto que o satélite de maneira geral é menos instável que nas condições anteriores. Ressalta-se aqui, que todas as simulações são realizadas para rotores operando sem sistema de controle, ou seja, passivamente, e com os seguintes momentos principais de inércia, calculados para o protótipo experimental mostrado na Figura 2.66:

$$\begin{aligned}
 I_{C_{1z}} &= 17,71 \text{ kgm}^2 & I_{C_{2y}} &= 10,42 \text{ kgm}^2 & I_{C_{3z}} &= 26,04 \text{ kgm}^2 \\
 I_{R1_{1z}} &= 15,19 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2 & I_{R1_{2y}} &= 78,75 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2 & I_{R1_{3z}} &= 78,75 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2 \\
 I_{R2_{1z}} &= 78,75 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2 & I_{R2_{2y}} &= 15,19 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2 & I_{R2_{3z}} &= 78,75 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2 \\
 I_{R3_{1z}} &= 78,75 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2 & I_{R3_{2y}} &= 78,75 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2 & I_{R3_{3z}} &= 15,19 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2
 \end{aligned}$$

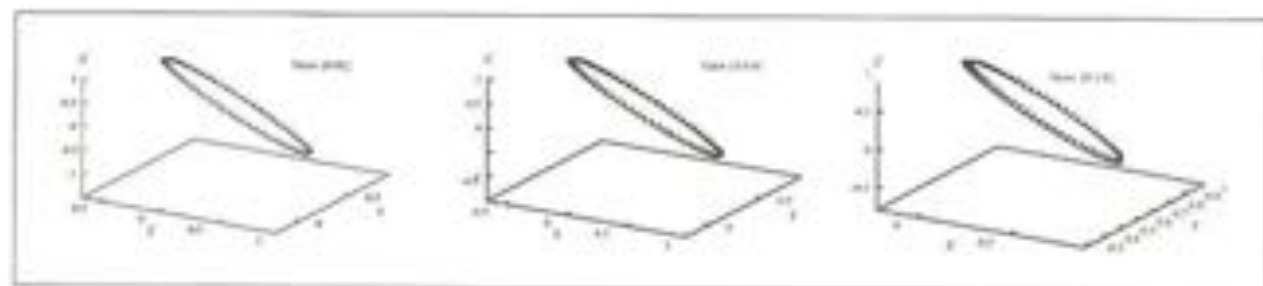


Figura 2.65

Órbitas descritas pelos centros de cada face do satélite. Estas trajetórias são resultados das simulações com três rotores internos em funcionamento e a seguinte perturbação inicial: $\varphi_1 = 0$ [rad], $\dot{\varphi}_1 = 0,01$ [rad/s], $\varphi_2 = 0$ [rad], $\dot{\varphi}_2 = 0$ [rad/s], $\varphi_3 = 0$ [rad] e $\dot{\varphi}_3 = 0$ [rad/s].

Um protótipo experimental foi construído para uma comparação qualitativa dos resultados. Este protótipo, apresentado na Figura 2.66(a), é composto por uma caixa de acrílico, com cinco rotores internos, de modo que o centro de massa do satélite coincide com a orientação da estrutura do suporte triaxial, que possibilita três rotações consecutivas (ângulos de Kardan) e a simulação do satélite em um ponto de sua órbita em torno da Terra. Com esse protótipo é possível realizar experimentos de caráter qualitativo, impondo uma rotação aos rotores internos.

Dessa maneira pode-se ver qual será o comportamento do satélite para condições iniciais distintas de movimento. Na Figura 2.66(b), pode ser observado um quadro de uma animação gráfica do satélite, que foi construída utilizando-se o software *3DStudio*. Pode-se perceber que na animação gráfica as condições iniciais são mostradas na tela do computador, facilitando a apresentação dos resultados. Além disso, as trajetórias dos vetores ortogonais ao centro de cada face são “desenhadas” à medida que o corpo se movimenta.

Este recurso é muito importante para a compreensão dos movimentos e para a comparação com os resultados apresentados na forma gráfica. Somando-se as animações gráficas aos resultados apresentados de maneira tradicional e ao protótipo de laboratório (vide filmagem no CD), é possível tornar a disciplina de sistemas mecânicos mais interessantes e “dinâmica”.

Além disso fazendo-se uso de quase todos os sentidos dos alunos, estimula-se e facilita-se uma melhor compreensão dos fenômenos físicos envolvidos. Para o aprimoramento das comparações teórico-experimentais, é utilizada uma câmara de vídeo, onde as imagens processadas e trabalhadas a posteriori viabilizam uma comparação entre as trajetórias exe-

cutadas pelos modelos teóricos e pelos protótipos experimentais. Para o caso particular do satélite fixa-se a seu corpo um pequeno laser, com o intuito de projetar em uma tela a trajetória descrita por um ponto em uma de suas faces (veja CD-ROM).

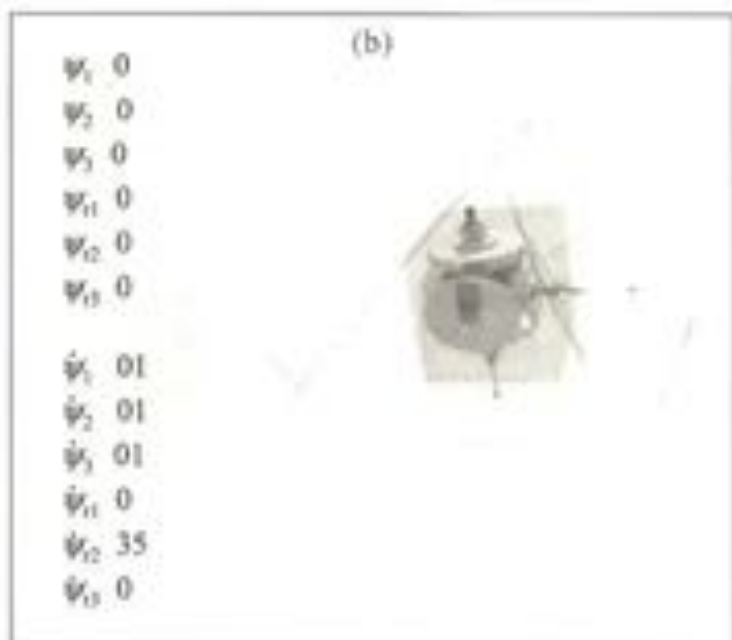
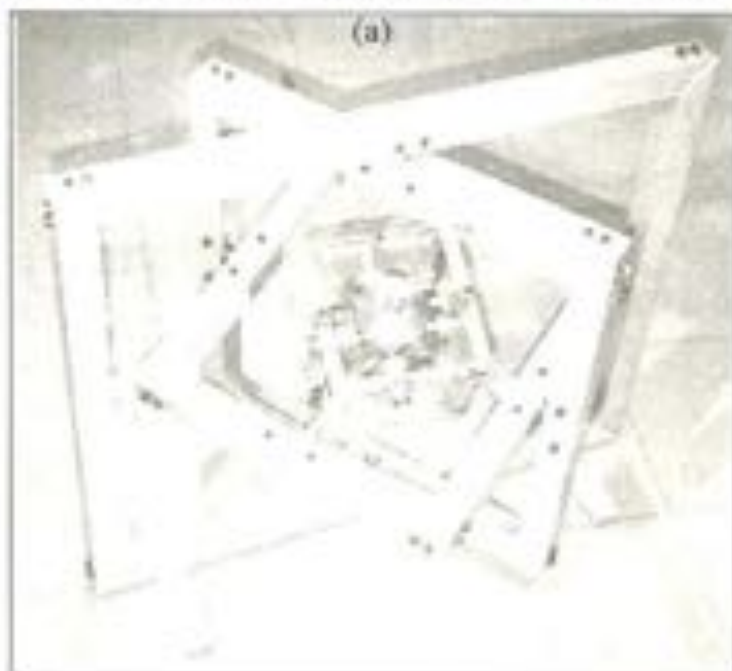


Figura 2.66

(a) Conjunto montado com o satélite no centro do suporte triaxial – protótipo de laboratório. (b) Quadro de uma animação gráfica com as trajetórias descritas pelos vetores nos centros das faces (veja o CD-ROM com exemplos teórico-experimentais).

2.19 Exercícios Propostos

1. Dois sistemas de referência, um inercial I e um móvel B solidário ao corpo rígido, são definidos. Sabendo-se que T é a matriz de transformação de coordenadas que leva a representação de um vetor de sistema inercial para o móvel B , explique por que:

$$\sum_I \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m \cdot_I \mathbf{v}) \text{ é correto.}$$

$$\sum_B \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m \cdot_B \mathbf{v}) \text{ é falso.}$$

$$\sum_B \mathbf{F} = T \cdot \frac{d}{dt}(m \cdot_I \mathbf{v}) \text{ é correto.}$$

Dada a equação

$$\sum_{j=1}^n {}_B \mathbf{M}_O = \mathbf{I}_O \cdot \frac{d}{{}_B dt}({}_B \boldsymbol{\omega}) + {}_B \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_O \cdot {}_B \boldsymbol{\omega}) + m \cdot {}_B \mathbf{r}_O \times {}_B \mathbf{a}_O$$

responda às Questões 2 a 6 a seguir.

- Explique por que a equação é sempre deduzida na base móvel solidária ao corpo rígido.
- Se o sistema de referência móvel B , solidário ao corpo rígido, coincidir com os eixos principais de inércia do corpo, qual será a característica marcante do tensor de inércia \mathbf{I}_O ?
- Supondo-se que o sistema móvel B coincide com os eixos principais de inércia e, além disso, o movimento do corpo rígido limita-se ao plano, qual dos termos da equação de Euler será nulo? Explique.
- Qual dos termos da equação de Euler será nulo caso você decida posicionar a origem do sistema móvel B no centro de massa do corpo? Explique.
- Caso você decida posicionar a origem do sistema móvel B em um ponto fora do centro de massa, cuja aceleração linear é nula, e, ao mesmo tempo, efetua-se a somatória de momento em relação a este ponto, qual dos termos da equação de Euler desaparecerá? Explique e dê um exemplo.
- Pensando no movimento plano, e sabendo-se que as velocidades angulares dos corpos que compõem o sistema mecânico são todas constantes (as acelerações angulares são todas nulas), qual dos termos da equação de Euler necessariamente será nulo?
- Pensando no movimento espacial, e sabendo-se que as velocidades angulares dos corpos que compõem o sistema mecânico são todas constantes, pode-se afirmar que o termo da Questão 7 é também nulo? Explique.

A Figura 2.67 refere-se às Questões de 9 a 19. A figura ilustra uma viga homogênea de massa m acoplada a uma rótula no ponto O e a uma mola de constante elástica k no ponto

B. As dimensões da viga são mostradas na Figura 2.67. A mola apresenta um comprimento inicial l_0 . Dois sistemas de referência, I e $B1$, são mostrados.

9. Existe a necessidade de adotar mais um sistema de referência móvel, além do $B1$?

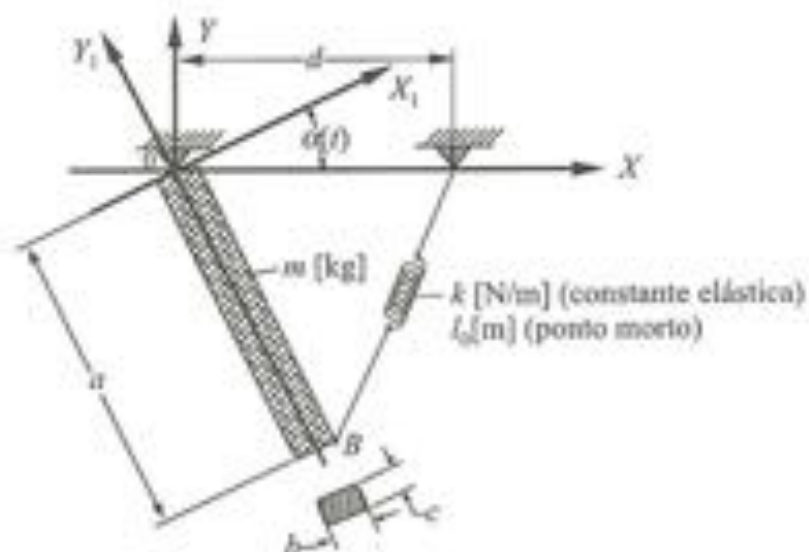


Figura 2.67

Viga homogênea acoplada a uma mola e a uma rótula. Sistema mecânico referente às Questões 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 e 19.

- Determine a matriz de transformação de coordenadas para as bases definidas por você.
- Calcule o vetor de posição para o centro de massa da viga mostrada na Figura 2.66.
- Calcule o vetor de posição que define a deformação da mola mostrada na Figura 2.66.
- Calcule o vetor de velocidade do centro de massa da viga mostrada na Figura 2.66.
- Esboce o diagrama de corpo livre para a viga.
- Descreva a força de mola de forma vetorial na base que achar mais conveniente.
- Calcule o tensor de inércia da viga em relação a seu centro de massa e em relação ao ponto O .
- Determine a equação de movimento para a viga $\ddot{\alpha} = f(\alpha, \dot{\alpha})$.
- Como você resolveria a equação de movimento $\ddot{\alpha} = f(\alpha, \dot{\alpha})$ obtida na Questão 17? Analítica ou numericamente?
- Solucione a equação diferencial de movimento.

O corpo formado pelo braço rígido e pela chapa, também rígida, gira com velocidade angular constante $\dot{\alpha}_1$ [rad/s] como é mostrado na Figura 2.68. Sobre a superfície S da placa, um pino é colocado em movimento, realizando uma precessão $\dot{\alpha}_2$, uma nutação $\dot{\alpha}_3$ e um spin $\dot{\alpha}_4$. A geometria do problema é conhecida, ou seja, sabem-se as dimensões R [m], L [m], h [m], r [m] e e [m] e são definidos 5 sistemas de referência, a saber: I – inercial XYZ , $B1$ – móvel solidário à chapa $X_1Y_1Z_1$, $B2$ – móvel $X_2Y_2Z_2$, $B3$ – móvel $X_3Y_3Z_3$ e $B4$ – móvel $X_4Y_4Z_4$. Pede-se:

$$\begin{aligned}
 m &= 1 \text{ kg} \\
 r &= 0,010 \text{ m} \\
 e &= 0,002 \text{ m} \\
 h &= 0,050 \text{ m} \\
 L &= 0,050 \text{ m} \\
 R &= 0,500 \text{ m} \\
 \mu_s &= 0,100 \\
 g &= 9,8 \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$

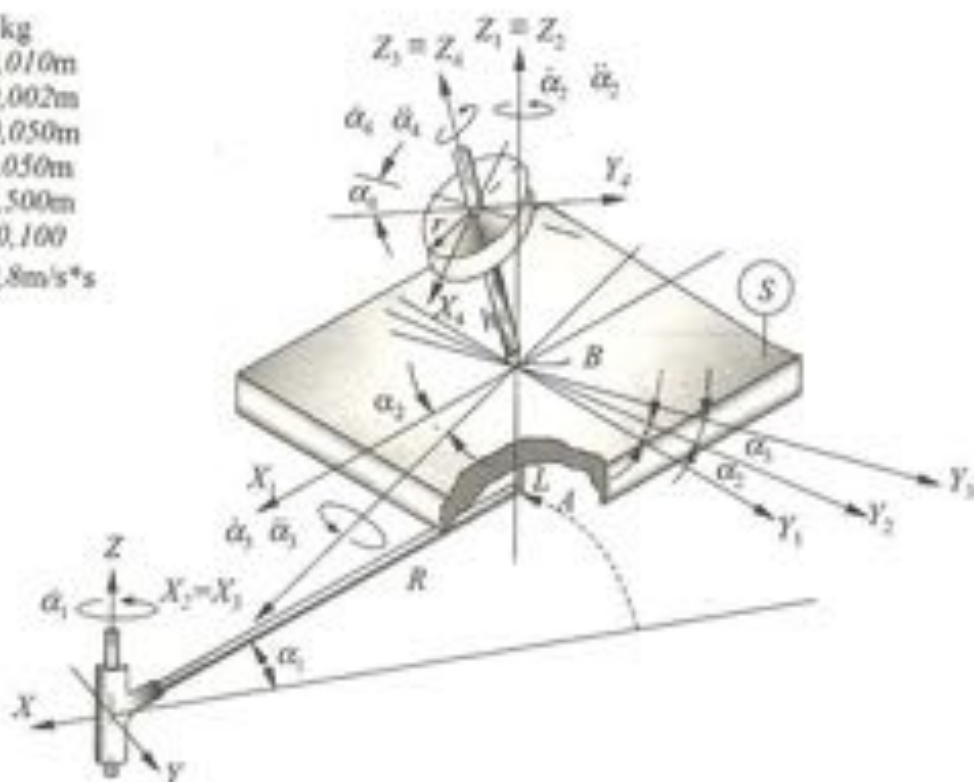


Figura 2.68

Pião sobre corpo formado pelo braço rígido e pela chapa rígida. Sistema mecânico referente às Questões 20, 21, 22, 23, 24, 25 e 26.

20. As matrizes de transformação de coordenadas de I para $B1$, de $B1$ para $B2$, de $B2$ para $B3$ e de $B3$ para $B4$.
21. Calcule as velocidades e acelerações angulares absolutas do corpo e da base móvel solidária ao pião. Qual a melhor base para a representação da velocidade angular absoluta do corpo? Justifique com clareza!
22. Calcule a aceleração linear absoluta do centro de massa do pião na base em que for mais conveniente.
23. Construa o diagrama de corpo livre para o pião. Qual a base mais conveniente para representar a aceleração do centro de massa e as forças atuantes sobre o mesmo no ponto de contato? Justifique.
24. Calcule o tensor de inércia do pião em relação ao ponto e a base móvel mais conveniente.
25. Obtenha as equações diferenciais de movimento para o pião em função da velocidade angular da chapa $\dot{\alpha}_1$ e da geometria e coordenadas do problema.
26. Obtenha as equações que descrevem o comportamento da força de reação no ponto B em função dos movimentos e coordenadas do pião.

27. Sabendo-se que, no instante em que o pião é posto em movimento, a placa gira com velocidade angular $\dot{\alpha}_1 = 1 \text{ rad/s}$ e as condições iniciais são conhecidas, pergunta-se: o pião escorregará ou não sobre a superfície S ? Sabe-se que o coeficiente de atrito estático entre a superfície e o pião é $\mu_s = 0,1$.

Condições iniciais: $\alpha_2 = 0 \text{ rad}$, $\alpha_3 = 10 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}$, $\alpha_4 = 0 \text{ rad}$, $\dot{\alpha}_2 = 0 \text{ rad/s}$, $\dot{\alpha}_3 = 0 \text{ rad/s}$ e $\dot{\alpha}_4 = 40 \cdot \pi \text{ rad/s}$.

28. Para o pêndulo duplo mostrado na Figura 2.69, sabe-se que o vetor de posição e o de velocidade absoluta da partícula, ambos representados com auxílio da base inercial, são dados por:

$${}_I \mathbf{r}_1 = {}_I \mathbf{l}_1 = \begin{Bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 \\ l_1 \cos \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_I \mathbf{r}_2 = {}_I \mathbf{l}_1 + {}_I \mathbf{l}_2 = \begin{Bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_I \mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 \\ -\dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$${}_I \mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_1 [l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)] - \dot{\theta}_2 [l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)] \\ -\dot{\theta}_1 [l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] - \dot{\theta}_2 [l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Definindo-se o vetor de coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = \{\theta_1 \quad \theta_2\}^T$ e de velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2\}^T$, calcule os jacobianos de translação para as duas partículas, baseado no princípio de D'Alembert e de Jourdain, ou seja,

$$\left(\frac{\partial {}_I \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T, \left(\frac{\partial {}_I \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{q}} \right)^T, \left(\frac{\partial {}_I \mathbf{v}_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T, \left(\frac{\partial {}_I \mathbf{v}_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T.$$

29. Sabendo-se que os vetores de posição e de velocidade absoluta podem ser representados nas respectivas bases $B1$ e $B2$:

$${}_{B1} \mathbf{r}_1 = {}_{B1} \mathbf{l}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [m]$$

$${}_{s2}\mathbf{r}_2 = \mathbf{T}_{\theta_2} {}_{s1}\mathbf{l}_1 + {}_{s2}\mathbf{l}_2 = \begin{Bmatrix} l_1 \sin \theta_2 \\ l_1 \cos \theta_2 + l_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [m]$$

$${}_{s1}\mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_1 l_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [m/s]$$

$${}_{s2}\mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta}_1 (l_1 \cos \theta_2) - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [m/s]$$

calcule os jacobianos de translação para as duas partículas, baseado no princípio de D'Alembert e Jourdain, ou seja,

$$\left(\frac{\partial {}_{s1}\mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T, \left(\frac{\partial {}_{s2}\mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{q}} \right)^T, \left(\frac{\partial {}_{s1}\mathbf{v}_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T, \left(\frac{\partial {}_{s2}\mathbf{v}_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T.$$

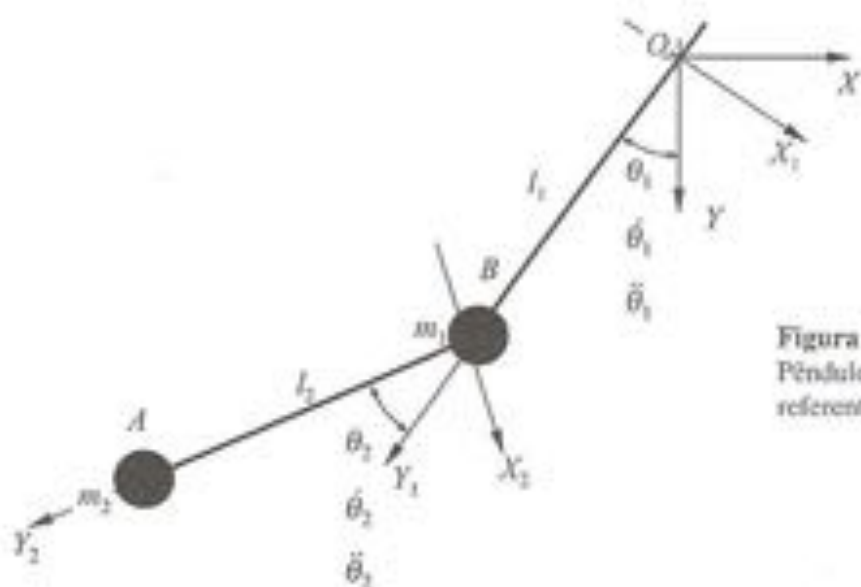


Figura 2.69
Pêndulo duplo. Sistema mecânico referente às Questões 28, 29 e 30.

30. Comparando-se os resultados das Questões 28 e 29, o que você pode concluir sobre os jacobianos de translação?

As questões de 31 a 38 relacionam-se com o sistema mecânico mostrado na Figura 2.70.

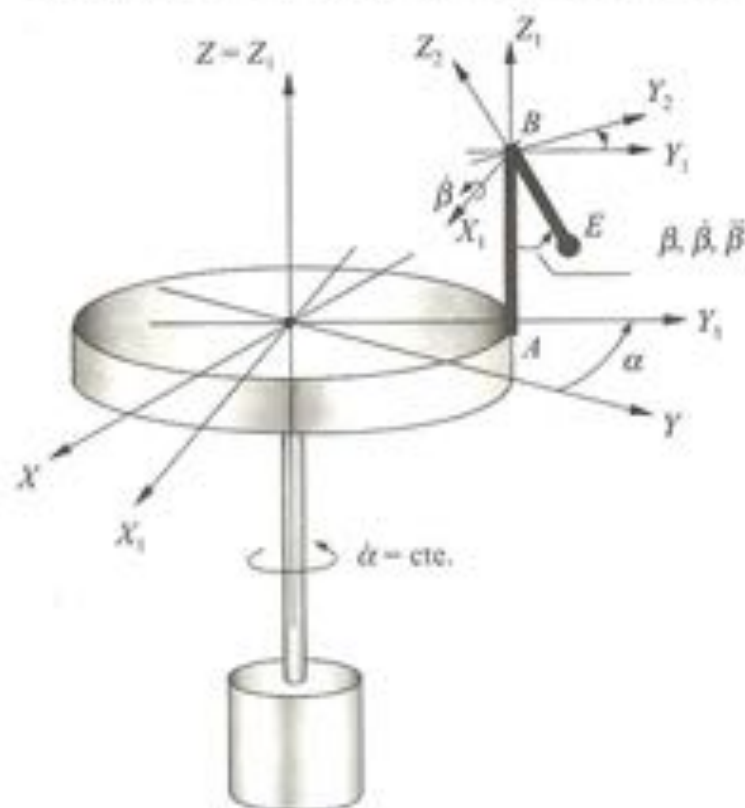


Figura 2.70
Pêndulo simples montado em um disco rotativo. Sistema mecânico referente às questões 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37 e 38.

31. Calcule o jacobiano de translação com base no princípio de D'Alembert $\left(\frac{\partial {}_I \mathbf{r}_{OE}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T$ quando o vetor ${}_I \mathbf{r}_{OE}$ é descrito na base inercial.
32. Calcule o jacobiano de translação com base no princípio de Jourdain $\left(\frac{\partial {}_I \mathbf{v}_E}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T$ quando o vetor de velocidade ${}_I \mathbf{v}_E$ é descrito na base inercial.
33. O que você pode concluir sobre os jacobianos $\left(\frac{\partial {}_I \mathbf{r}_{OE}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T$ e $\left(\frac{\partial {}_I \mathbf{v}_E}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T$ quando os vetores ${}_I \mathbf{r}_{OE}$ e ${}_I \mathbf{v}_E$ são representados com auxílio da base inercial.
34. Calcule o jacobiano de translação com base no princípio de D'Alembert $\left(\frac{\partial {}_{B2} \mathbf{r}_{OE}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T$ quando o vetor ${}_{B2} \mathbf{r}_{OE}$ é descrito utilizando-se a base móvel $B2$.
35. Calcule o jacobiano de translação com base no princípio de Jourdain $\left(\frac{\partial {}_{B2} \mathbf{v}_{OE}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T$ quando o vetor ${}_{B2} \mathbf{v}_{OE}$ é descrito utilizando-se a base móvel $B2$.
36. O que você pode concluir a respeito dos jacobianos de translação $\left(\frac{\partial {}_{B2} \mathbf{r}_{OE}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T$ e $\left(\frac{\partial {}_{B2} \mathbf{v}_{OE}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T$ quando os vetores ${}_{B2} \mathbf{r}_{OE}$ e ${}_{B2} \mathbf{v}_{OE}$ são descritos utilizando-se a base móvel $B2$.
37. Calcule a equação de movimento da partícula E de acordo com as seguintes expressões:

$$(I) \quad \left(\frac{\partial {}_I \mathbf{r}_{OE}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T ({}_I \mathbf{P} - m {}_I \mathbf{a}_E) = 0$$

$$(II) \quad \left(\frac{\partial {}_I \mathbf{v}_E}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T ({}_I \mathbf{P} - m {}_I \mathbf{a}_E) = 0$$

$$(III) \quad \left(\frac{\partial {}_{B2} \mathbf{r}_{OE}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T ({}_{B2} \mathbf{P} - m {}_{B2} \mathbf{a}_E) = 0$$

$$(IV) \quad \left(\frac{\partial {}_{B2} \mathbf{v}_E}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T ({}_{B2} \mathbf{P} - m {}_{B2} \mathbf{a}_E) = 0$$

38. Chegue a uma conclusão sobre a aplicação do princípio de D'Alembert e do princípio de Jourdain para o cálculo das equações de movimento sem que seja necessário o cálculo das reações dinâmicas, analisando o resultado das expressões (I), (II), (III) e (IV).
39. Dado o mecanismo da Figura 2.71 chegue à equação de movimento para o motor através do método de Newton-Euler-Jourdain. Os parâmetros T (torque acionador), ϵ (excentricidade), l (comprimento da biela) e F (força aplicada) são todos conhecidos. Assuma que o atrito entre o pistão (corpo 3) e a parede (P) é desprezível e que as propriedades geométricas dos corpos 1 (manivela), 2 (biela) e 3 (pistão) são também conhecidas, ou seja, respectivamente massas m_1 , m_2 e m_3 e inércias I_{zz1} e I_{zz2} .

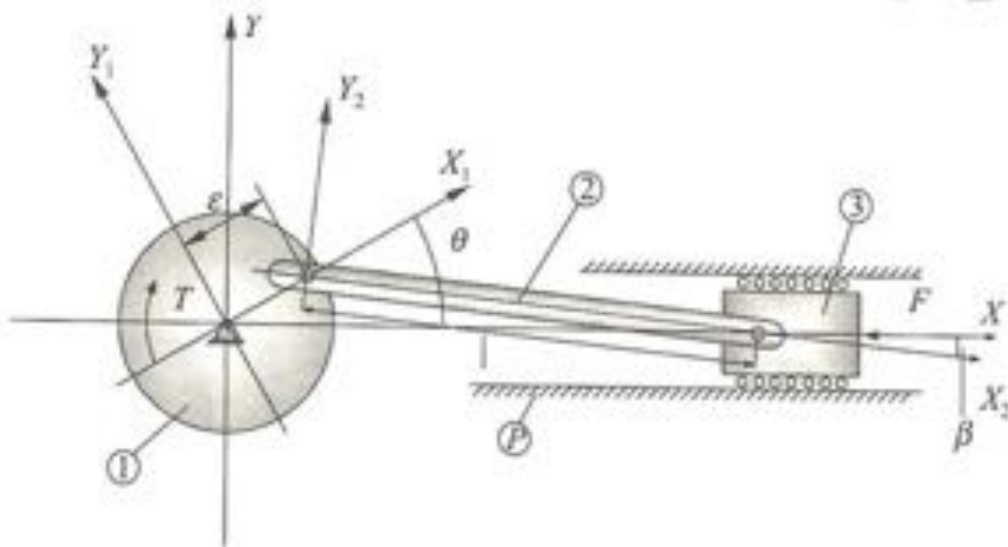
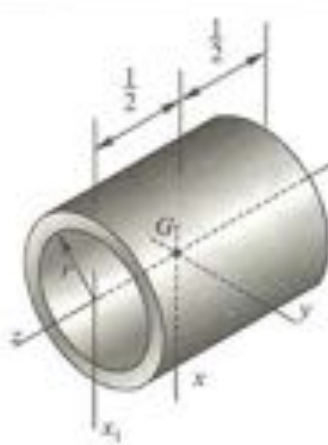
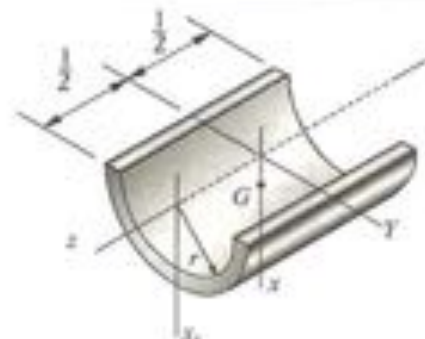


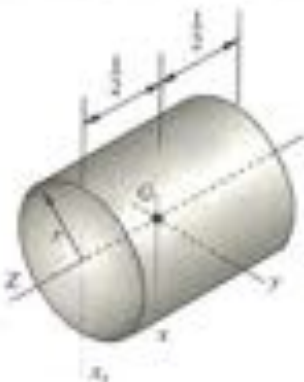
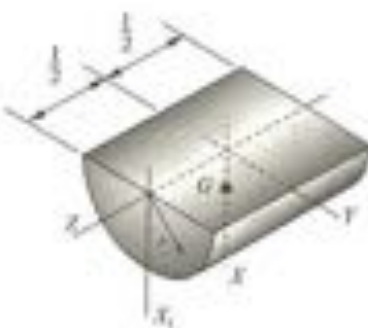
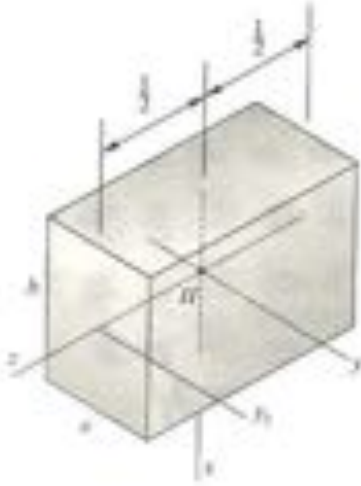
Figura 71
Mecanismo biela-manivela. Sistema mecânico da Questão 39.



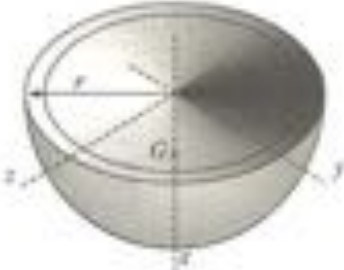



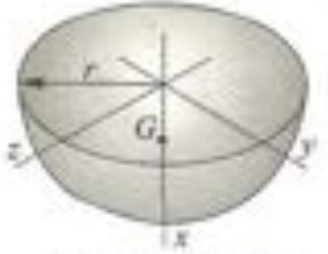
Apêndice A

Momentos de Inércia de Massa

Corpo	Centro de massa	Momentos de inércia
	—	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1y_1} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$
Tubo cilíndrico circular		
	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1y_1} = I_{y_1z_1} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$
Melo tubo cilíndrico circular		

Corpo	Centro de massa	Momentos de inércia
 <p>Cilindro circular</p>	—	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $I_{xy} = I_{yz} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$
 <p>Semicilindro</p>	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{4}mr^2$ $I_{xy} = I_{yz} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$
 <p>Paralelepípedo retangular</p>	—	$I_{xx} = \frac{1}{12}m(a^2 + l^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12}m(b^2 + l^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ $I_{xy} = \frac{1}{12}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$

Corpo	Centro de massa	Momentos de inércia
 <p data-bbox="302 716 617 745">Barra delgada uniforme</p>	—	$I_{yy} = \frac{1}{12} ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{3} ml^2$
 <p data-bbox="391 1163 529 1192">Esfera oca</p>	—	$I_{zz} = \frac{2}{3} mr^2$
 <p data-bbox="354 1549 561 1579">Meia esfera oca</p>	$x = \frac{r}{2}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3} mr^2$

Corpo	Centro de massa	Momentos de inércia
		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mr^2$
Esfera cheia		
	$\bar{x} = \frac{3r}{8}$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mr^2$
Meia esfera cheia		

Bibliografia

- ABELL, M. L., BRASELTON, J. P. (1994). *Mathematica by Example*. Academic Press, Inc.
- ANCHEV, A. A. (1973). *Equilibrium Attitude Transitions of a Three-Rotor Gyrostat in a Circular Orbit*. AIAA Journal, v. 11, 4.
- BEER, F. P., Johnston Jr., E. R. (1973). *Mecânica Vetorial para Engenheiros: Dinâmica*, v. II. Mc Graw-Hill do Brasil Ltda.
- BREMER, H. (1988). *Dynamik und Regelung mechanischer Systeme*. Teubner Studienbücher – Mechanik, Stuttgart.
- BREMER, H., PFEIFFER, F. (1992). *Elastische Mehrkörpersysteme*. Teubner Studienbücher – Mechanik, Stuttgart.
- BROCH, J. T. (1980). *Mechanical Vibration and Shock Measurements*. B & K – Brüel & Kjaer, 2. ed.
- CAPRA, F. (1988). *Ponto de Mutação*. Editora Pensamentos.
- FABECK, W. von (1980). *Kreiselgeräte*. Vogel-Verlag.
- GASCH, R. (1992). *Strukturdynamik*. Band 1, Springer Verlag, Berlin.
- HALLMANN, W., WILFRIED, L. (1988). *Handbuch der Raumfahrttechnik – Grundlagen, Nutzung, Raumfahrtsysteme, Produktsicherung, Projektmanagement*. Carl Hanser Verlag, München.
- HARRIS, C. H., CREDE, C. E. (1976). *Shock and Vibration Handbook*, McGraw-Hill Book Company.
- KUGA, H. K., RAO, K. R. (1995). *Introdução à mecânica orbital*. INPE, São José dos Campos.
- MAGNUS, K. (1971). *Kreisel – Theorie und Anwendungen*. Springer-Verlag, Berlin.
- MALHEIROS, P. (1995). *3D Studio 2.0 – Guia Completo*. Berkley Brasil Editora.
- MERIAM, J. (1971). *Dinâmica*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.

- PFEIFFER, F. (1989). *Einführung in die Dynamik*. Teubner Studienbücher – Mechanik, Stuttgart.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., FLANNERY, B. P., VETTERLING, W. T. (1989). *Numerical Recipes in Pascal – The art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge.
- RINONAPOLI, L., BERGOMI, R. (1975). *A 14 Degrees of Freedom Mathematical Model to Predict Car Handling Behaviour on Smooth and on Bumpy Roads*. Proceedings of IUTAM Symposium on Dynamics of Vehicles, p. 86-109, Delft, Holanda.
- SANTOS, I. F., FERRETI, A. P., SCHMIDEK, E. (1996). Realidade Virtual e Dinâmica de Sistemas Mecânicos – Aplicações no Ensino de Engenharia. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL SOBRE A EDUCAÇÃO CONTINUADA NA ENGENHARIA PARA O DESENVOLVIMENTO DA TECNOLOGIA. *Anais...* p. 1-6, Rio de Janeiro, Brasil.
- SANTOS, I. F. (1997). Combinando a Dinâmica de Múltiplos Corpos com Técnicas de Simulação Numérica para a Análise de Conforto Vibracional de Veículos. In: IV SIBRAV – SIMPÓSIO BRASILEIRO DE ACÚSTICA VEICULAR. *Anais...* p. 51-63, São Bernardo do Campo, Brasil.
- SANTOS, I. F. (1997). Dinâmica Não-linear de Múltiplos Corpos para a Análise de Conforto Vibracional de Veículos. In: SIMEA'97 – IX SIMPÓSIO DE ENGENHARIA AUTOMOTIVA. *Anais...* p. 20-31, São Paulo, Brasil.
- SANTOS, I. F., FERRETI, A. P., SCHMIDEK, E. (1997). *Dynamics of Nonlinear Systems and Virtual Reality – An Education Tool for Engineering*. Proceeding of the XVI Biennial ASME Conference on Vibration and Noise; paper DETC97/VIB4216, Sacramento, USA.
- SANTOS, I. F., FERRETI, A. P., CARVALHO, R. F. (1997). Metodologia para Análise da Dinâmica Não-linear de Sistemas de Múltiplos Corpos – Aplicação a Satélites. In: COBEM'97 – XIV CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA. *Anais...* Bauru, Brasil.
- SANTOS, I. F., PADOVESE, G. C. (1997). Dinâmica Não Linear de Suspensões Ativas. In: COBEM'97 – XIV CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA. *Anais...* Bauru, Brasil 1997.
- SANTOS, I. F., COLLA, G. C. (1997). Influência de Palhetas Flexíveis na Dinâmica de Sistemas Rotativos – Teoria e Experimento, COBEM'97 – XIV CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA. *Anais...* Bauru, Brasil.
- SCHIEHLEN, W. (1988). *Technische Dynamik*, Teubner Studienbücher – Mechanik, Stuttgart.
- WEBER, H. I. (1971). *Optimale Lagerregelung von Satelliten mit simultan Entdrallten Rotoren*. Tese de Doutorado, Universidade Técnica de Munique.