



ANÁLISE DA DELAMINAÇÃO EM PLACAS COMPÓSITAS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

DELAMINATION ANALYSIS IN COMPOSITE PLATES USING THE FINITE ELEMENT METHOD

Iran S. Aragão Filho, Marcelo A. Savi

Instituto Militar de Engenharia
Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais
22.290.270 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil
E-Mail: savi@epq.ime.br

ABSTRACT

This contribution presents a study on the delamination of composite laminated plates, employing the finite element method to simulate the behavior of a Kirchhoff-Love plate. Simulations are carried out employing a displacement based four nodes rectangular element with six degrees of freedom at each node. Interlaminar stresses are obtained from a post-processing procedure based on the analysis of three-dimensional equilibrium equations. Failure analysis is developed considering delamination, yielding of the material and fiber/matrix cracking. Failure factors are defined based on Tsai-Hill, Hashin and quadratic delamination criteria. Furthermore, the inclusion of interlaminar stresses in Tsai-Hill and Hashin criteria defines other two failure factors. Simulations show that different kinds of anisotropy are associated with critical situations for the delamination of laminated plates.

Keywords: Composite Materials, Delamination, Finite Element Method.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo sobre a delaminação em placas compósitas utilizando-se o método dos elementos finitos para simular numericamente o comportamento de uma placa de Kirchhoff-Love. As simulações são realizadas considerando um elemento finito retangular, com um nó em cada vértice, possuindo seis graus de liberdade por nó. As tensões interlaminares são calculadas a partir de um pós-processamento que considera as equações de equilíbrio tridimensionais. Uma análise de falha é desenvolvida considerando a delaminação, o escoamento do material e o rompimento das fibras e da matriz. Esta análise é feita utilizando os critérios de Tsai-Hill, de Hashin e o da delaminação quadrática. A inclusão das tensões interlaminares nos critérios de Tsai-Hill e de Hashin definem outros dois critérios de falha. Os resultados mostram que o aumento do grau de anisotropia torna a análise da delaminação mais importante.

Palavras-chave: Materiais Compósitos, Delaminação, Método dos Elementos Finitos.

1 - INTRODUÇÃO

Os materiais estruturais podem ser divididos em quatro categorias básicas: metais, polímeros, cerâmicos e compósitos. Os compósitos podem ser definidos como sendo uma combinação de dois ou mais materiais distintos, contendo uma interface identificada entre eles. Atualmente, esses materiais são largamente empregados em uma variedade de componentes automotivos, aeroespaciais, de aeronaves, de navios e em diversos produtos de uso cotidiano.

O elemento básico de um material compósito é a *lâmina* que, usualmente, é acoplada a outras lâminas para formar o que se chama de *laminado*. Cada lâmina é reforçada por fibras que podem ter uma orientação genérica. Um material compósito é anisotrópico no sentido de que suas propriedades dependem da orientação dos eixos coordenados. Tipicamente, existem propriedades diferentes nas direções longitudinal e transversal às direções das fibras, o que define um comportamento ortotrópico de uma lâmina neste sistema de eixos.

A degradação de um laminado pode ser dividida em dois tipos: delaminação e dano intralaminar. A delaminação é caracterizada pela perda de adesão entre duas lâminas adjacentes. A evolução deste dano pode causar o descolamento das lâminas e uma conseqüente perda de rigidez e de resistência no laminado. O dano intralaminar consiste numa trinca na matriz, um descolamento entre fibra e matriz ou uma ruptura da fibra.

A delaminação é usualmente causada pelo crescimento de tensões interlaminares nas bordas livres, próximas de falhas e trincas ou nas descontinuidades do material. Outros tipos de delaminação incluem as causadas pela flambagem na lâmina ou pela microflambagem na fibra, ou ainda como uma conseqüência de impactos que produzem uma delaminação local. A maioria dos trabalhos sobre delaminação é tratada no contexto da Mecânica da Fratura, considerando os modos de falha do material. Outra linha de análise considera modelos constitutivos que utilizam variáveis de estado para descrever o comportamento da interface interlaminar. De uma maneira geral, despreza-se a espessura desta interface, considerando-a como uma

superfície, e avaliando a adesão do contato de duas lâminas adjacentes. A perda de adesão, e a conseqüente perda de contato em pontos das lâminas, caracteriza o descolamento ou a delaminação destes pontos [1]. Vieira Carneiro e Savi [2] propõem um modelo para descrever o fenômeno onde as tensões interlaminares são determinadas a partir de uma modificação da teoria de laminados proposta por Bai *et al.* [3], utilizando uma interface de espessura finita. Outro procedimento para determinar as tensões interlaminares utiliza o método dos elementos finitos. Reddy [4] apresenta uma revisão sobre o tema, apresentando inúmeras referências.

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo sobre a delaminação em placas compósitas utilizando-se o método dos elementos finitos para simular numericamente o comportamento de uma placa de Kirchhoff-Love. As simulações são feitas considerando um elemento finito retangular, com um nó em cada vértice, possuindo seis graus de liberdade por nó. As tensões interlaminares são calculadas a partir de um pós-processamento que considera as equações de equilíbrio tridimensionais. Este procedimento permite avaliar as tensões fora do plano a partir de uma teoria plana. A matriz de rigidez elementar, assim como os cálculos do pós-processamento, são obtidos através da manipulação simbólica das equações de governo. Uma análise de falha é desenvolvida considerando a delaminação, o escoamento do material e o rompimento das fibras e da matriz. Esta análise é feita utilizando os critérios de Tsai-Hill, de Hashin e o da delaminação quadrática. A inclusão das tensões interlaminares nos critérios de Hashin e de Tsai-Hill definem outros dois critérios de falha [5]. Os resultados mostram algumas comparações entre estes critérios para diferentes situações físicas.

2 - LÂMINA ORTOTRÓPICA

Considere uma placa plana, reforçada por fibras, que possui espessura desprezível na presença das outras dimensões. Admite-se que as fibras estão dispostas na matriz de maneira homogênea, e que não existe qualquer efeito de concentração de tensões (Figura 1).

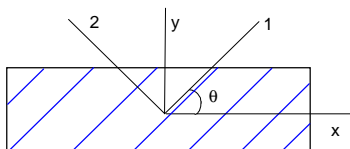


Figura 1 - Placa plana reforçada com fibras.

No sistema principal, eixos 1-2, a relação entre tensões e deformações pode ser simplificada a partir da lei de Hooke generalizada para o caso ortotrópico, de tal forma que [6]:

$$\hat{\sigma}_I = \hat{C}_{IJ} \hat{\epsilon}_J \quad (1)$$

onde $I, J = 1, 2, 3$ e a convenção soma é adotada [7]; $\hat{\sigma}_I$ e $\hat{\epsilon}_J$ são vetores construídos a partir das componentes dos tensores de tensão e deformação, respectivamente, no plano xy . Desta forma, tem-se que $I = 1$ e $I = 2$, estão associados às tensões/deformações normais nas direções 1 e 2, respectivamente. Por outro lado, $I = 3$ está associado ao cisalhamento na direção 1-2. \hat{C}_{IJ} são constantes elásticas que podem ser relacionadas com as constantes de engenharia. A ortotropia da lâmina estabelece simetrias que definem a seguinte forma de \hat{C}_{IJ} [6]:

$$\hat{C}_{IJ} \equiv \begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & 0 \\ \hat{C}_{21} & \hat{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{C}_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

A relação entre as componentes de tensão e deformação, segundo eixos quaisquer $x-y$, são encontradas através da rotação do sistema de referência.

$$\hat{\sigma}_I = T_{IK} \sigma_K ; \quad \hat{\epsilon}_I = T_{IK} \epsilon_K \quad (3)$$

onde T_{IK} é a matriz de rotação que pode ser escrita conforme a seguir, utilizando a notação $c = \cos\theta$ e $s = \sin\theta$:

$$T_{IK} \equiv \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Desta forma, tem-se a relação constitutiva nos eixos $x-y$,

$$\sigma_I = C_{IJ} \epsilon_J \quad (5)$$

sendo $C_{IJ} = T_{IM}^{-1} \hat{C}_{MK} T_{KJ}$. De forma alternativa, escreve-se a seguinte equação constitutiva:

$$\sigma_I = Q_{IJ} \gamma_J \quad (6)$$

onde γ_J representa as componentes do vetor ϵ_I , substituindo a deformação cisalhante $\epsilon_3 = \epsilon_{xy}$ pela deformação de engenharia $\gamma_3 = \gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy}$. Note que substituiu-se C_{IJ} por Q_{IJ} na equação constitutiva para considerar esta alteração.

3 - PLACA LAMINADA

Considere uma placa constituída de n lâminas de material compósito submetida a esforços normais e de flexão. Admite-se a hipótese cinemática de Kirchhoff-Love e que as lâminas são de material ortotrópico que se curvam de forma conjunta e uniforme, sem descolamento. Desta forma, a equação (6) estabelece a relação constitutiva para cada lâmina. A hipótese cinemática implica que:

$$\gamma_I = \gamma_I^0 + z\kappa_I \quad (7)$$

onde γ_I^0 é a deformação da superfície média e as curvaturas κ_I são definidas a seguir,

$$\kappa_1 = -w_{,xx} ; \kappa_2 = -w_{,yy} ; \kappa_3 = -2w_{,xy} \quad (8)$$

As resultantes de tensões são dadas por,

$$N_I = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_I^k dz = \sum_{k=0}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_I^k dz \right) \quad (9)$$

$$M_I = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_I^k z dz = \sum_{k=0}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_I^k z dz \right) \quad (10)$$

onde o índice k está associado a uma lâmina específica.

Usando a hipótese cinemática de Kirchhoff-Love (7) e a equação constitutiva (6), as seguintes equações são obtidas,

$$N_I = A_{IJ} \gamma_J^0 + B_{IJ} \kappa_J \quad (11)$$

$$M_I = B_{IJ} \gamma_J^0 + D_{IJ} \kappa_J \quad (12)$$

onde

$$A_{IJ} = \sum_{k=0}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{IJ}^k dz \right) = \sum_{k=0}^n Q_{IJ}^k (z_k - z_{k-1}) \quad (13)$$

$$B_{IJ} = \sum_{k=0}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{IJ}^k z dz \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n Q_{IJ}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (14)$$

$$D_{IJ} = \sum_{k=0}^n \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{IJ}^k z^2 dz \right) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n Q_{IJ}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (15)$$

A matriz A_{IJ} relaciona os esforços normais com as deformações na superfície média; D_{IJ} , por outro lado, relaciona os momentos com as curvaturas; B_{IJ} descreve o acoplamento entre os esforços normais e as curvaturas, assim como dos momentos com as deformações na superfície média.

4 - TENSÕES INTERLAMINARES

O estudo das tensões interlaminares é de grande importância na análise da delaminação de materiais compósitos e a sua determinação requer uma análise tridimensional de tensões [6]. Em uma lâmina, para regiões suficientemente distantes das descontinuidades geométricas, como por exemplo as bordas livres, pode-se considerar que existe o estado plano de tensões. Pipes e Pagano [8] mostram que mesmo em um laminado carregado uniaxialmente, há uma região de contorno ao longo das bordas livres onde as tensões existem no estado tridimensional. Esta região é aproximadamente igual a espessura do laminado e o comportamento das tensões interlaminares pode ser avaliada a partir das equações de equilíbrio tridimensionais, da seguinte forma:

$$\tau_{xz}^k(z) = - \int_{z_k}^z (\sigma_{1,x}^k + \sigma_{3,y}^k) dz + C_1^k(x, y) \quad (16)$$

$$\tau_{yz}^k(z) = - \int_{z_k}^z (\sigma_{3,x}^k + \sigma_{2,y}^k) dz + C_2^k(x, y) \quad (17)$$

$$\sigma_z^k(z) = - \int_{-t/2}^z \tau_{yz,y} dz \quad (18)$$

onde $C_1^k(x, y)$ e $C_2^k(x, y)$ são constantes que definem as tensões interlaminares na interface entre as camadas k e $k-1$.

Estudos mostram que diversos fatores influenciam as tensões interlaminares e, conseqüentemente, a delaminação dos compósitos [8-11].

5 - CRITÉRIOS DE FALHA

Os modos de falha em uma placa laminada dependem do carregamento, da seqüência de empilhamento do laminado, da geometria e das propriedades mecânicas das camadas. Os critérios de falha para materiais compósitos podem ser classificados em dois grupos [12]: critérios independentes e polinomiais. Os critérios independentes incluem os critérios de tensão e deformação máxima e prevêem a falha quando as componentes das tensões ou deformações, nos eixos principais de uma lâmina, excedem resistências ou deformações críticas. Os critérios polinomiais, por outro lado, representam uma variação do critério de Tsai que contemplam uma combinação das resistências normais e cisalhantes.

Neste trabalho, avalia-se a falha de laminados a partir dos critérios polinomiais, considerados parcialmente interativos devido a relação entre as componentes das tensões. Dentre estes critérios, analisam-se três: critérios de Hashin, de Tsai-Hill e de delaminação quadrática, onde são consideradas as tensões interlaminares τ_{xz} e τ_{yz} [12]. Além disso, consideram-se versões planas dos critérios de Tsai-Hill e de Hashin onde não se leva em

conta as tensões interlaminares. Este caso é o mais usual para o tratamento de placas [6, 13].

Desta forma, definem-se seis fatores de falha: dois relacionados a delaminação (Hashin e delaminação quadrática), e os outros quatro fatores são relacionados a falha por escoamento (Tsai-Hill), ou por falha da fibra/matriz (Hashin). De fato, existem dois fatores associados ao critério de Tsai-Hill e dois associados ao critério de Hashin. A diferença está na inclusão, ou não, das tensões interlaminares.

5.1 - Critério de Hashin

O critério de Hashin analisa o material com relação a falha da matriz, da fibra e a delaminação, considerando quatro modos de falha intralaminares (dois para a fibra e dois para a matriz), além de um modo de falha para delaminação [12]. Para avaliar os fatores de falha deste critério, consideram-se as tensões avaliadas nos eixos principais 1-2, denotadas por $\hat{\sigma}_I$. Com isso, tem-se:

Tração na fibra, $\hat{\sigma}_1 > 0$:

$$\left(\frac{\hat{\sigma}_1}{S_L^+}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\tau}_{yz} + \hat{\sigma}_3}{S_{LT}}\right)^2 \leq 1 \quad (19)$$

Compressão na fibra, $\hat{\sigma}_1 < 0$:

$$\left(\frac{\hat{\sigma}_1}{S_L^-}\right)^2 \leq 1 \quad (20)$$

Tração na matriz, $\hat{\sigma}_2 > 0$:

$$\left(\frac{\hat{\sigma}_2}{S_T^+}\right)^2 + \frac{\hat{\tau}_{xz}^2 + \hat{\tau}_{yz}^2 + \hat{\sigma}_3^2}{S_{LT}^2} \leq 1 \quad (21)$$

Compressão na matriz, $\hat{\sigma}_2 < 0$:

$$\left(\frac{\hat{\sigma}_2}{2S_{LT}}\right)^2 + \left[\left(\frac{S_T^-}{2S_{LT}}\right)^2 - 1\right] \frac{\hat{\sigma}_2}{S_T^-} + \frac{\hat{\tau}_{xz}^2 + \hat{\tau}_{yz}^2 + \hat{\sigma}_3^2}{S_{LT}^2} \leq 1 \quad (22)$$

Delaminação:

$$\frac{\hat{\tau}_{xz}^2 + \hat{\sigma}_3^2}{(S_T^+)^2} \leq 1 \quad (23)$$

onde S_{LT} é a resistência ao cisalhamento; S_T^+ e S_T^- são, respectivamente, as resistências à tração e à compressão na direção transversal; S_L^+ e S_L^- são, respectivamente, as resistências à tração e à compressão na direção da fibra.

5.2 - Critério de Tsai-Hill

O critério de Tsai-Hill é uma modificação do critério de von Mises levando em conta o comportamento anisotrópico do material. Ele avalia uma relação entre as tensões no plano e as tensões cisalhantes [12]:

$$\left(\frac{\sigma_1}{S_L}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{S_L^2} + \left(\frac{\sigma_2}{S_T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xz}}{S_T^-}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{yz} + \sigma_3}{S_{LT}}\right)^2 \leq 1 \quad (24)$$

Note que, neste critério, as resistências devem ser usadas adequadamente de acordo com os sinais das tensões principais. Por exemplo, se σ_1 é positivo e σ_2 é negativo, os denominadores de (24) devem ser, respectivamente, S_L^+ e S_T^- .

5.3 - Critério da Delaminação Quadrática

O critério de delaminação quadrática foi proposto por Brewer e Lagage [14], baseando-se no critério de Kim e Soni [15], que prevê a delaminação ocorrendo devido a tensão normal em torno das bordas livres. Visando estabelecer um critério mais geral englobando os casos em que a delaminação é afetada pelas tensões interlaminares, Brewer e Lagage propuseram o critério de delaminação quadrática, apresentado a seguir.

$$\left(\frac{\tilde{\tau}_{xz}}{S_{xz}}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\tau}_{yz}}{S_{yz}}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\sigma}_z^+}{S_z^+}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\sigma}_z^-}{S_z^-}\right)^2 \leq 1 \quad (25)$$

onde $\tilde{\tau}_{xz}$ e $\tilde{\tau}_{yz}$ são as tensões interlaminares médias;

$\tilde{\sigma}_z^+$ e $\tilde{\sigma}_z^-$ são, respectivamente, as tensões normais médias de tração e compressão; S_{xz} e S_{yz} são as resistências cisalhantes interlaminares. Cada componente de tensão média é definida como:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{\lambda_{med}} \int_0^{\lambda_{med}} \sigma_{ij} d\lambda \quad (26)$$

onde λ é o afastamento com relação à borda livre e λ_{med} representa um afastamento médio que deve ser definido experimentalmente [14].

A partir das considerações feitas na teoria de placas laminadas e considerando as tensões cisalhantes obtidas das equações de equilíbrio, tem-se a seguinte forma simplificada:

$$\left(\frac{\tilde{\tau}_{xz}}{S_{xz}}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{\tau}_{yz}}{S_{yz}}\right)^2 \leq 1 \quad (27)$$

onde, de uma maneira geral, considera-se $S_{xz} = S_{yz} = S_{LT}$. Este critério utiliza as tensões médias calculadas a partir de uma certa distância da borda livre, aproximadamente igual a espessura da placa.

5.4 - Critério de Hashin no Plano

A análise de falha da fibra e da matriz de placas laminadas pelo critério de Hashin, de uma maneira geral, utiliza apenas as tensões no plano. Assim, define-se o critério de Hashin no plano anulando-se as tensões $\hat{\tau}_{xz}$ e $\hat{\tau}_{yz}$ nas equações (19-23), reescrevendo-o como se segue [13]:

Tração na fibra, $\hat{\sigma}_1 > 0$:

$$\left(\frac{\hat{\sigma}_1}{S_L^+}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\sigma}_3}{S_{LT}}\right)^2 \leq 1 \quad (28)$$

Compressão na fibra, $\hat{\sigma}_1 < 0$:

$$\left(\frac{\hat{\sigma}_1}{S_L^-}\right)^2 \leq 1 \quad (29)$$

Tração na matriz, $\hat{\sigma}_2 > 0$:

$$\left(\frac{\hat{\sigma}_2}{S_T^+}\right)^2 + \left(\frac{\hat{\sigma}_3}{S_{LT}}\right)^2 \leq 1 \quad (30)$$

Compressão na matriz, $\hat{\sigma}_2 < 0$:

$$\left(\frac{\hat{\sigma}_2}{2S_{LT}}\right)^2 + \left[\left(\frac{S_T^-}{2S_{LT}}\right)^2 - 1\right] \frac{\hat{\sigma}_2}{S_T^-} + \left(\frac{\hat{\sigma}_3}{S_{LT}}\right)^2 \leq 1 \quad (31)$$

5.5 - Critério de Tsai-Hill no Plano

A análise de falha de placas laminadas a partir do critério de Tsai-Hill, normalmente não considera as tensões fora do plano. Assim, esta versão plana do critério é escrita a partir de uma simplificação do critério de Tsai-Hill, anulando-se as tensões τ_{xz} e τ_{yz} em (24).

Desta forma, chega-se ao seguinte critério,

$$\left(\frac{\sigma_1}{S_L}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{S_L^2} + \left(\frac{\sigma_2}{S_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{S_{LT}}\right)^2 \leq 1 \quad (32)$$

6 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos tem como objetivo aproximar uma grandeza contínua, regida por uma equação de governo, através da discretização do domínio em sub-domínios, elementos, conectados por pontos comuns, nós. Nestes sub-domínios, a grandeza contínua é aproximada por polinômios escritos em termos de seus valores nodais, formando uma base para a solução global.

Através de uma ponderação adequada, normalmente utilizando o método de Galerkin, formula-se um modelo físico discreto para descrever o problema [12]. Neste trabalho, o modelo discreto da formulação apresentada considera um elemento retangular de dimensões $2a$ e $2b$, nas direções x e y , respectivamente. Cada elemento possui um nó em cada vértice e dois sistemas de coordenadas: um local x_e-y_e e um sistema de coordenadas naturais $\xi-\eta$, onde $\xi = x_e/a$ e $\eta = y_e/b$. Os sistemas possuem eixos paralelos e as origens são coincidentes no centro do elemento. Assim, os deslocamentos (u , v , w) são determinados por interpolações do tipo:

$$u = \sum_{j=1}^p U_j \psi_j(x, y) \quad (33)$$

$$v = \sum_{j=1}^p V_j \psi_j(x, y) \quad (34)$$

$$w = \sum_{j=1}^m W_j \phi_j(x, y) \quad (35)$$

onde (U_j , V_j) correspondem aos valores nodais de (u , v) e W_j corresponde aos valores nodais de w , que possui quatro valores associados: w , w_x , w_y e w_{xy} . A derivada mista w_{xy} é incluída na interpolação visando garantir a continuidade entre os elementos com relação a inclinação dos deslocamentos transversais. Todo o conjunto de deslocamentos e rotações é chamado de deslocamentos nodais generalizados e estão associados com o elemento Ω^e . Os deslocamentos no plano (u , v) são aproximados a partir da interpolação linear de Lagrange, ψ_i , e portanto, $p = 4$. No caso do deslocamento transversal w , utiliza-se a interpolação cúbica de Hermite, ϕ_i , tomando-se $m = 16$ [4]. Após fazer as substituições adequadas a partir das equações de equilíbrio para o caso estático, obtém-se o seguinte modelo de elementos finitos:

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_3 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} N_n \psi_i ds = 0 \quad (36)$$

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_3 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_2 \right) dx dy - \int_{\Gamma^e} N_n \psi_i ds = 0 \quad (37)$$

$$\int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} M_1 + 2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} M_3 + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} M_2 + \phi_i q \right) dx dy + \int_{\Gamma^e} \left(\phi_i V_n + \frac{\partial \phi_i}{\partial n} M_n \right) ds = 0 \quad (38)$$

onde N_n , V_n e M_n estão associados às condições de contorno definidas em Γ^e . Estas equações também podem ser expressas na seguinte forma:

$$\sum_{\beta=1}^3 \sum_{j=1}^{r(\beta)} K_{ij}^{\alpha\beta} U_j^\beta - F_i^\alpha = 0, \quad i=1, 2, \dots, r(\alpha); \quad e \quad \alpha=1, 2, 3. \quad (39)$$

assim, $r(1) = r(2) = 4$; $r(3) = 16$. Os coeficientes de rigidez $K_{ij}^{\alpha\beta}$, assim como os do vetor força, F_i^α , estão definidos nas referências [4, 12].

Esta formulação é utilizada na implementação de um código computacional. As integrações e derivações são feitas a partir do manipulador simbólico do *Mathematica* e então, transportadas para o programa. Desta forma, a matriz de rigidez, o vetor força, as deformações, as tensões no plano e as tensões interlaminares são calculadas a partir de expressões obtidas nesse manipulador simbólico. Após calcular os valores nodais, efetua-se um pós-processamento onde são calculadas as tensões e as deformações no centro de cada elemento. A seguir, calculam-se as tensões interlaminares a partir das equações de equilíbrio tridimensionais. O próximo passo da análise é implementar os critérios de falha.

A análise de falha é desenvolvida utilizando-se os critérios de Tsai-Hill, de Hashin e o da delaminação quadrática. A inclusão das tensões interlaminares nos critérios de Hashin e de Tsai-Hill definem outros dois critérios de falha. Desta forma, apresentam-se seis fatores de falha: dois referentes à delaminação, dois referentes ao escoamento do material e dois referentes a falha da matriz e das fibras. Para isso, consideram-se as tensões nas direções principais, avaliando os fatores de falha em cada elemento. A análise se inicia na superfície inferior do laminado, prosseguindo por todas as superfícies e interfaces, avaliando-se qual elemento possui o maior valor do fator de falha para cada critério.

7 - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção, consideram-se algumas simulações realizadas a partir da formulação apresentada. Admita inicialmente, uma placa quadrada de lado $L = 0,4m$, com duas camadas $[45^\circ/\theta]$ de espessura constante, $h = 0,002m$. O material é o T300/5208 cujas propriedades são apresentadas nas Tabelas 1-2. A placa está apoiada nos quatro lados e submetida a uma carga distribuída $q = 16kN/m^2$. Neste caso, se $\theta \neq 45^\circ$, a placa é assimétrica o que acarreta o fenômeno do acoplamento extensão-flexão. Este fenômeno pode ser verificado através da assimetria dos deslocamentos transversais, mostrado na Figura 2 para a placa $[45^\circ/70^\circ]$.

Tabela 1 - Propriedades mecânicas dos materiais.

	T300/5208	E-Glass/470-36
E_1 (GPa)	131,0	24,4
E_2 (GPa)	13,0	6,9
G_{12} (GPa)	6,4	2,9
ν_{12}	0,38	0,32

Tabela 2 - Resistências mecânicas dos materiais.

	T300/5208	E-Glass/470-36
S_L^+ (GPa)	1,4000	0,5840
S_L^- (GPa)	1,1380	0,8030
S_T^+ (GPa)	0,0809	0,0430
S_T^- (GPa)	0,1890	0,1870
S_{LT} (GPa)	0,0690	0,0640

Visando avaliar diferentes configurações de placas, varia-se o ângulo θ desde zero até 90° . A Figura 3 mostra a variação dos fatores de falha, associados aos diferentes critérios, e do deslocamento máximo da placa, adimensionalizado da seguinte forma,

$$\bar{w}_0 = w_0 \left(\frac{E_2 h^3}{L^4 q} 10^2 \right) \quad (40)$$

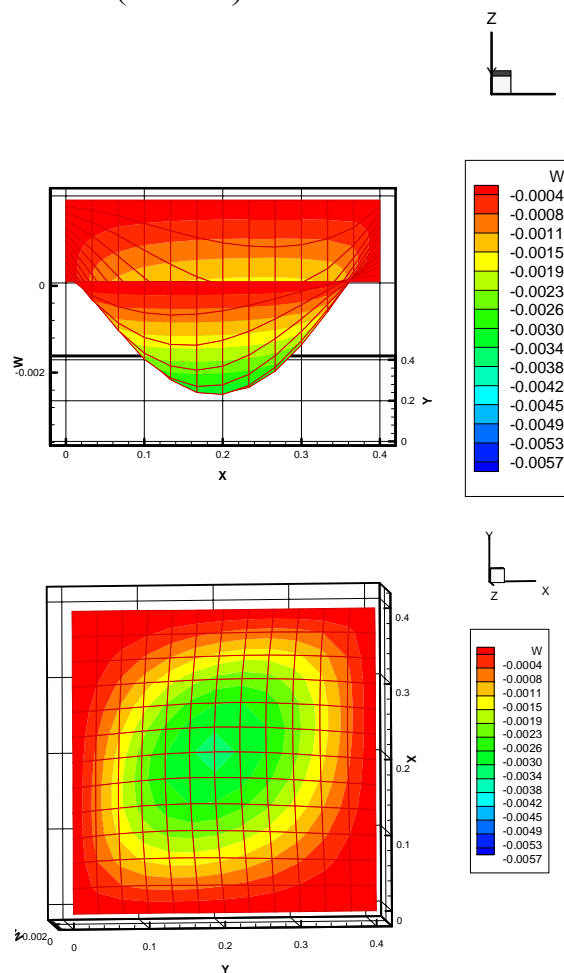


Figura 2 - Influência do acoplamento no deslocamento da placa de duas camadas de mesmo material $[45^\circ/70^\circ]$ e apoiada.

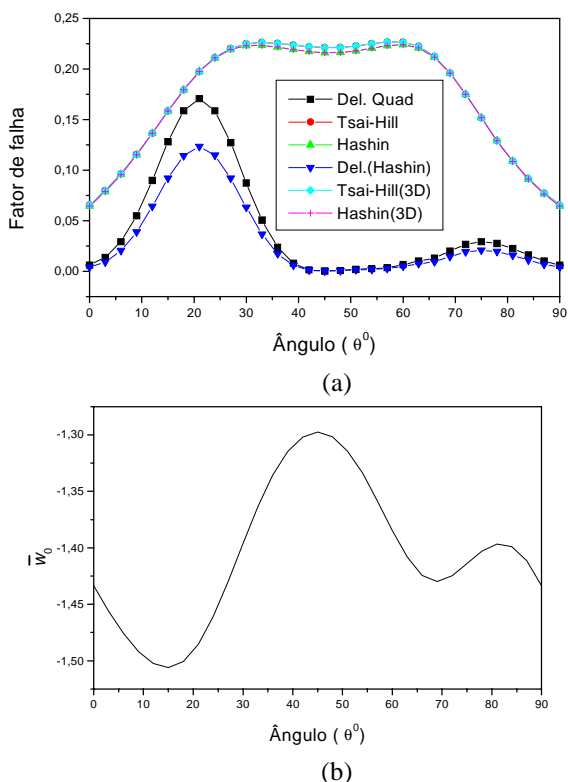


Figura 3 - Placa $[45^\circ/\theta]$, T300/5208 graphite/epoxy. Influência do ângulo das fibras na análise de falha (a), e nos deslocamentos transversais (b).

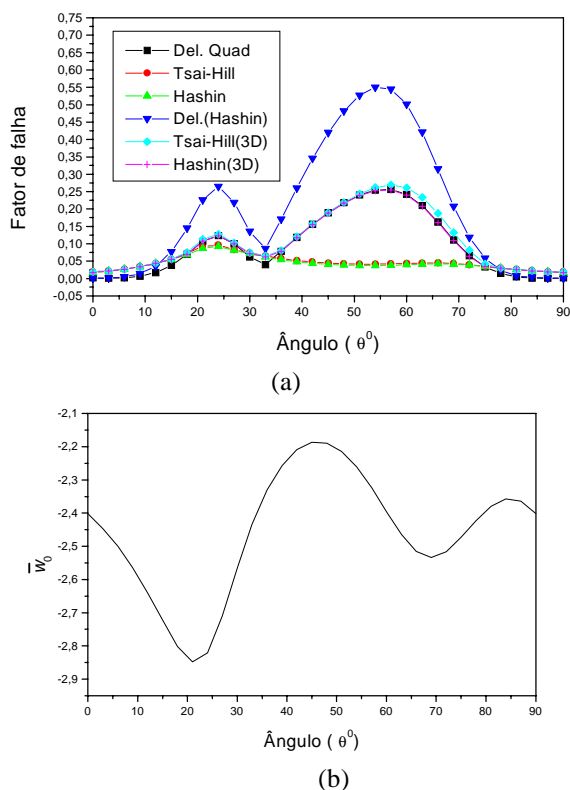


Figura 4 - Placa $[45^\circ/\theta]$, T300/5208 graphite/epoxy e E-glass/470-36. Influência do ângulo das fibras na análise de falha (a), e nos deslocamentos transversais (b).

Os critérios de Tsai-Hill e de Hashin tridimensionais, que incluem as tensões interlaminares na análise, mostram-se mais conservativos do que os critérios de delaminação. Em torno de $\theta = 20^\circ$, tem-se um crescimento das tensões interlaminares o que faz com que os fatores associados à delaminação cresçam. Uma vez que $\theta = 45^\circ$ representa um laminado com duas camadas com a mesma orientação, esta configuração apresenta um mínimo dos fatores de falha associados aos critérios de delaminação. Com relação ao deslocamento transversal máximo, tem-se um máximo em torno de $\theta = 15^\circ$.

Admita agora uma mudança no material da lâmina superior para o E-Glass/470-36 (Tabelas 1-2) o que aumenta o grau de anisotropia do compósito. A placa está submetida a uma carga distribuída $q = 6\text{kN/m}^2$. A Figura 4 mostra a variação dos fatores de falha, associados aos diferentes critérios, e do deslocamento máximo da placa variando o ângulo θ desde 0° até 90° . Nesta nova placa, o aumento do grau de anisotropia acarreta uma tendência de aumento das tensões interlaminares fazendo com que o fenômeno da delaminação se torne mais importante. Isto é confirmado pelo aumento dos fatores de falha associados aos critérios de delaminação. O critério de delaminação de Hashin é o mais conservativo para os ângulos entre 15° e 75° . Com relação aos deslocamentos, o comportamento é similar ao da placa anterior de um ponto de vista qualitativo. Quantitativamente, no entanto, a placa apresenta deslocamentos maiores.

Considere agora, uma placa de quatro camadas, antissimétrica $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]$, submetida a uma carga uniformemente distribuída $q = 35\text{kN/m}^2$. As camadas possuem espessura constante $h = 0,001\text{m}$ e mesmas propriedades mecânicas referentes ao material T300/5208 graphite/epoxy, em todas as camadas. A Figura 5 mostra a variação dos fatores de falha e dos deslocamentos em função da posição das fibras, θ . Para ângulos entre 20° e 80° , as tensões interlaminares, próximas as bordas paralelas ao eixo y , são preponderantes em relação as tensões no plano, atingindo valores críticos quando as fibras estão a 60° . A Figura 5a mostra que o critério de delaminação quadrática está entre os mais conservativos quando θ está entre 20° e 80° . Os critérios que incorporam as tensões interlaminares possuem seus máximos em $\theta = 60^\circ$. Além disso, vale destacar que os critérios de Tsai-Hill e de Hashin tridimensionais são sempre mais conservativos do que os outros. Isso ocorre uma vez que as tensões interlaminares são incorporadas na análise.

Com relação ao deslocamento transversal do centro da placa, vê-se que o mínimo ocorre em torno de $\theta = 45^\circ$ (Figura 5b). É interessante observar que, nas regiões onde os fatores de falha são baixos, os deslocamentos são altos e vice-versa, não havendo uma região onde coincidam deslocamentos mínimos e baixos fatores de falha. Visando evitar os fatores de falha de valores elevados, as configurações no intervalo entre 45° e 70° devem ser evitadas. Por outro lado, para evitar os deslocamentos máximos deve-se desconsiderar as configurações para $\theta < 15^\circ$ e $\theta > 70^\circ$.

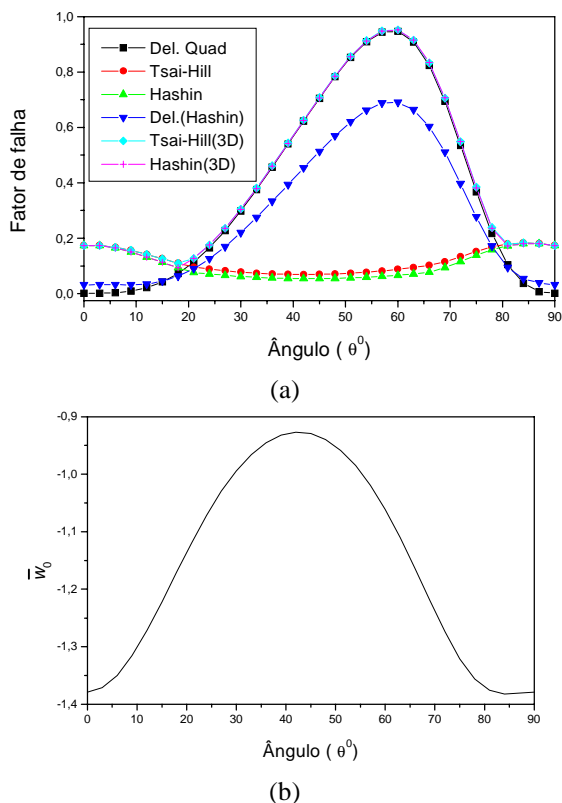


Figura 5 - Placa antissimétrica $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]$, T300/5208 graphite/epoxy. Influência do ângulo das fibras na análise de falha (a), e nos deslocamentos transversais (b).

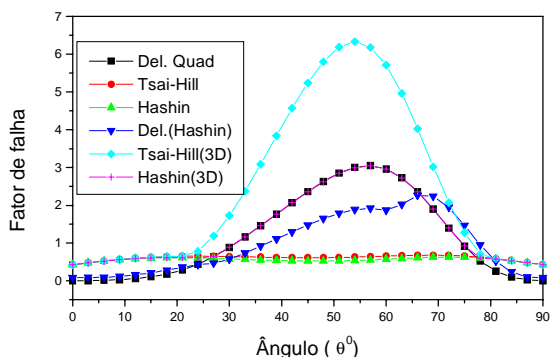


Figura 6 - Placa antissimétrica $[+\theta/-\theta/+\theta/-\theta]$, T300/5208 graphite/epoxy (camadas negativas) e E-glass/470-36 (camadas positivas). Influência do ângulo das fibras na análise de falha.

Neste ponto, admita que a placa antissimétrica é composta por dois materiais diferentes. O material das camadas de sinal positivo é o E-glass/470-36 enquanto as outras duas são compostas pelo T300/5208 graphite/epoxy. Nesta nova situação, a placa apresenta um sensível aumento das tensões interlaminares em relação à placa de T300/5208 graphite/epoxy, caracterizando um aumento dos fatores de falha associados aos critérios que incorporam as tensões fora do plano. Os deslocamentos transversais comportam-se como na placa com materiais idênticos. A Figura 6 mostra que, na região entre 45° e 70° , o laminado apresenta valores elevados dos fatores de falha.

8 - CONCLUSÕES

O procedimento desenvolvido mostrou-se eficiente para analisar a delaminação em placas compósitas. Os resultados mostram que o aumento do grau de anisotropia, através da consideração de diferentes materiais nas lâminas e/ou diferentes configurações, faz com que a delaminação se torne preponderante em uma análise de falha. Além disso, a inclusão das tensões interlaminares nos critérios de Tsai-Hill e de Hashin propicia critérios mais conservativos que podem ser utilizados para prever a falha do material compósito considerando diferentes modos de falha, sendo capazes de capturar o efeito da delaminação. Futuros trabalhos neste assunto devem considerar a utilização de elementos mais sofisticados, além da comprovação experimental dos resultados apresentados.

9 - AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer o suporte do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq.

10 - REFERÊNCIAS

- [1] Point, N. e Sacco, E.; “A Delamination Model for Laminated Composites”, Journal of Solids and Structures, v.33, No.4, pp.483-509, 1996.
- [2] Vieira Carneiro, C. A. e Savi, M. A.; “Modeling and Simulation of Delamination in Composite Materials”, Journal of Strain Analysis for Engineering Design, v.35, n.6, pp.479-492, 2000.
- [3] Bai, Q. S., Murakami, S. e Kanagawa, Y.; “A Lamination Theory Incorporating the Effect of Interlaminar Deformation”, Journal of Composite Materials, v.31, No.20, pp.2052-2073, 1997.
- [4] Reddy, J. N.; “Mechanics of Laminated Composite Plates - Theory and Analysis”, CRC Press, 1997.
- [5] Aragão Filho, I. S.; “Análise da Delaminação em Placas Compósitas Através do Método dos Elementos Finitos”, Dissertação de Mestrado, IME - Dept. Eng. Mecânica e de Materiais, 2000.
- [6] Gibson, R. F.; “Principles of Composite Materials Mechanics”, McGraw Hill, 1994.
- [7] Eringen, A. C.; “Mechanics of Continua”, John Wiley and Sons, 1967.
- [8] Pipes, R. B. e Pagano, N. J.; “Interlaminar Stresses in Composite Laminates Under Uniform Axial Extension”, Journal of Composite Materials, v.4, pp.538-548, 1970.
- [9] Pipes, R. B. e Pagano, N. J.; “Interlaminar Stress in Composite Laminates – An Approximate Elasticity Solution”, Journal of Applied Mechanics, v.41, Series E (3), pp.668-672, 1974.
- [10] Bhat, N. V. e Lagace, P. A.; “An Analytical Method for the Evaluation of Interlaminar Stress Due to Material Discontinuities”, Journal of Composite Materials, v.28, No.3, pp.190-209, 1994.

- [11] Herakovich, C. T.; “On the Relationship Between Engineering Properties and Delamination of Composite Materials”, Journal of Composite Materials, v.15, pp.336-348, 1981.
- [12] Ochoa, O. O. e Reddy, J. N.; “Finite Element Analysis of Composite Laminated”, Kluwer, Netherlands, 1992.
- [13] Tabiei, A., Jiang, Y. e Simitzes, G.J.; “Compressive Behavior of Moderately Thick Plates with Progressive Damage”, Mechanics of Composite Materials and Structures, v.4, pp.281-295, 1997.
- [14] Brewer, J. C. e Lagace, P. A.; “Quadratic Stress Criterion for Initiation of Delamination”, Journal of Composite Materials, v.22, pp.1141-1155, 1988.
- [15] Kim, R. Y. e Soni, S. R.; “Experimental and Analytical Studies on the Onset of Delamination in Laminated Composites”, Journal of Composite Materials, v.18, pp.70-80, 1984.