



## Caos em Sistemas Mecânicos

Marcelo Amorim Savi\*

### RESUMO

*Os sistemas não-lineares são passíveis de apresentar movimento caótico. Modernamente, o caos é entendido como o comportamento estocástico de sistemas determinísticos. Este trabalho apresenta uma revisão sobre as principais características do caos em sistemas mecânicos: forte dependência das condições iniciais, ferradura de Smale, atrator estranho, conjunto de Cantor, dimensão fractal, fronteira fractal de bacias de atração e expoentes de Lyapunov.*

### 1. INTRODUÇÃO

Os modelos não-lineares, de um modo geral, descrevem melhor os fenômenos físicos. Contudo, as dificuldades inerentes ao estudo dos problemas não-lineares, e o sucesso da mecânica linear, incentivaram, cada vez mais, o estudo de modelos lineares e bem comportados, fazendo com que os modelos não-lineares fossem evitados por muitas vezes.

Euler explicita bem a dificuldade de tratar problemas não-lineares quando fala sobre o movimento de fluidos: "Se

não nos é permitido penetrar a um conhecimento completo sobre o movimento dos fluidos, não é à mecânica e à insuficiência dos princípios conhecidos do movimento que se deve atribuir isto, mas à própria análise que aqui nos abandona".

O estudo de modelos lineares criou paradigmas que se enraizaram na tradição histórica. O determinismo estrito é um bom exemplo disto e pode ser bem representado pelo pensamento de Laplace que diz: "Devemos ver o estado presente do universo como o efeito do seu estado anterior, e como a causa daquele que virá. Uma inteligência que, em qualquer instante dado, soubesse todas as forças pela qual o mundo natural se move e a posição

\*Instituto Militar de Engenharia - Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais - 22.290-270 - Rio de Janeiro - RJ

de cada uma de suas partes componentes, e que tivesse também a capacidade de submeter todos estes dados à análise matemática, poderia encompassar na mesma fórmula os movimentos dos maiores objetos do universo e aqueles dos menores átomos; nada seria incerto para ele, e o futuro, assim como o passado, estaria presente diante de seus olhos”.

Foi Poincaré, em fins do século XIX, que falou claramente sobre o acaso se contrapondo ao determinismo estrito de Laplace: “Uma causa muito diminuta, que nos escapa, determina um efeito considerável, que não podemos deixar de ver, e então dizemos que este efeito é devido ao acaso. Se pudéssemos conhecer exatamente as leis da natureza e a situação do universo no instante inicial, seríamos capazes de prever exatamente a situação deste mesmo universo no instante subsequente. Mas mesmo quando as leis naturais já não tivessem mais segredo para nós, só poderíamos conhecer a situação inicial aproximadamente. Se isto nos permite antecipar a situação subsequente com o mesmo grau de aproximação, ficamos satisfeitos, dizemos que o fenômeno foi previsto, que é governado por leis. Mas nem sempre isto ocorre; pode acontecer que diferenças mínimas nas condições iniciais produzam diferenças muito grandes no fenômeno final; um erro mínimo nas primeiras produziria um erro enorme neste último. A previsão torna-se impossível e temos o fenômeno do acaso”.

Em 1963, Lorenz desenvolvia estudos sobre problemas atmosféricos, quando se deparou com o acaso descrito por Poincaré. Contando com o auxílio de um computador, Lorenz tratava o modelo de Rayleigh-Bernard para convecção de fluidos, e observou que uma pequena variação nas condições iniciais poderia acarretar grandes diferenças na evolução do sistema. Este fato ficou conhecido como *efeito borboleta*, como uma alusão de que se uma borboleta batesse suas asas em algum lugar do planeta, ela poderia alterar a resposta do sistema dinâmico. Tratava-se de um sistema totalmente determinístico cujos resultados poderiam ser aleatórios.

Este trabalho trouxe “a assustadora compreensão de que equações matemáticas simples podiam servir de modelo para sistemas tão violentos” (Gleick, 1987). Iniciava-se aí o moderno estudo do *caos*, cujas idéias básicas haviam sido alcançadas por Poincaré. O caos é uma das inúmeras possibilidades de comportamento de um sistema não-linear.

A idéia de que a natureza é bem comportada, que domina o senso comum, é uma conseqüência da exagerada utilização de modelos lineares, o que limitou o espectro de análise por muitos anos, eliminando uma incrível variedade de comportamentos.

A ciência moderna tende a atribuir o nome *caos* ao comportamento estocástico de sistemas determinísticos (Stewart, 1991). Cabe estabelecer a distinção entre fenômenos aleatórios e caóticos. Os fenômenos aleatórios dizem respeito a sistemas não-determinísticos. Ou seja, o sistema apresenta uma resposta aleatória como uma conseqüência de uma entrada aleatória (Meirovitch, 1986). Por outro lado, os fenômenos caóticos são determinísticos. Assim, para uma entrada totalmente conhecida e determinada surge uma resposta aleatória.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar alguns conceitos básicos relacionados ao *caos*. Inicialmente apresentam-se alguns sistemas físicos simples descritos por modelos não-lineares. A seguir tratam-se algumas características apresentadas em uma resposta caótica: comportamento caótico, ferradura de Smale, expoentes de Lyapunov.

## 2. SISTEMAS FÍSICOS NÃO-LINEARES

Esta seção apresenta alguns exemplos de sistemas físicos descritos através de modelos não-lineares. Apesar da simplicidade dos modelos apresentados, cada um deles possui uma dinâmica muito rica, passível de exibir um movimento caótico.

Considere, inicialmente, o movimento do pêndulo (Figura 1). A descrição deste movimento pode ser obtida fazendo o equilíbrio das forças que atuam na massa  $m$ . Assumindo um amortecimento viscoso linear e um forçamento periódico, obtém-se a seguinte equação do movimento,

$$\ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + \omega_0^2 \text{sen}(\theta) = \mu \text{sen}(\Omega t) \quad (1)$$

onde  $\theta$  representa a posição do pêndulo e  $\alpha$  é uma constante.  $\omega_0$  está associado à frequência natural do sistema.  $\mu$  e  $\Omega$  representam a amplitude e a frequência do forçamento periódico, respectivamente. O ponto significa a derivada em relação ao tempo,  $t$ .

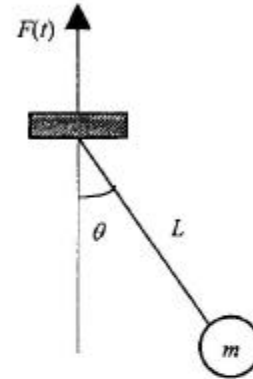


Figura 1: Pêndulo simples.

A consideração de que o movimento do pêndulo ocorre com pequenos ângulos, ( $\text{sen}(\theta) \approx \theta$ ), simplifica consideravelmente a equação do movimento, tornando-a linear. Esta aproximação, usualmente aceita, modifica totalmente a dinâmica do sistema.

Outro exemplo a ser considerado é um oscilador massa-mola-amortecedor, submetido a um forçamento externo,  $F(t)$ , onde a força de restituição da mola é dada por uma função do tipo  $K(u)$  enquanto o amortecimento é dado por uma função  $C(u, \dot{u})$  (Figura 2).

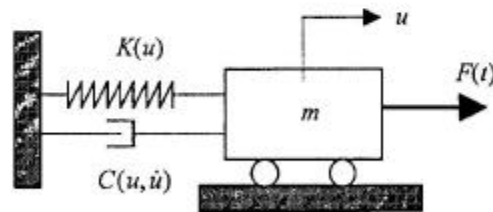


Figura 2: Oscilador massa-mola-amortecedor.

Fazendo o balanço de forças, obtém-se a seguinte equação do movimento,

$$m\ddot{u} + C(u, \dot{u}) + K(\dot{u}) = F(t) \quad (2)$$

onde  $u$  representa o deslocamento da massa  $m$ .

Considere então, um oscilador com uma força de restituição com não-linearidade cúbica e um amortecimento viscoso linear. A equação do movimento de um sistema deste tipo, admitindo um forçamento periódico, é mostrada a seguir,

$$\ddot{u} + \alpha \dot{u} + \omega_0^2 u + \beta u^3 = \mu \text{sen}(\Omega t). \quad (3)$$

Esta é a *equação de Duffing* usada para descrever uma série de fenômenos físicos importantes, dentre os quais deve-se destacar a *viga de Moon & Holmes*, que trata a flambagem de uma viga elástica submetida à ação de forças magnéticas (Moon, 1980) – (Figura 3).

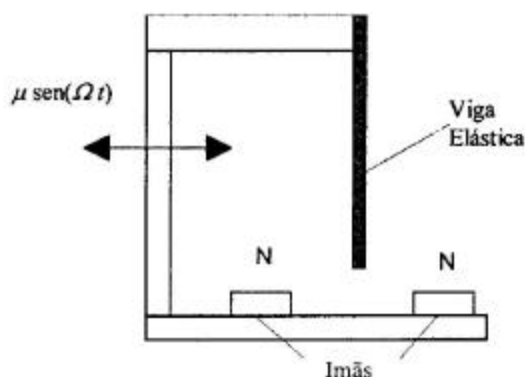


Figura 3: Viga de Moon & Holmes

Considere agora uma força de restituição elástica linear e um amortecimento não-linear. A seguinte equação do movimento pode ser escrita.

$$\ddot{u} + \alpha(1 - \beta u^2)\dot{u} + \omega_0^2 u = \mu \text{sen}(\Omega t). \quad (4)$$

Esta é a *equação de Van der Pol*, originalmente obtida para descrever o comportamento de um circuito elétrico com uma válvula tríodo, e uma resistência cujas propriedades variam de acordo com a corrente elétrica. O oscilador mostrado pode ser visto como o análogo mecânico deste circuito.

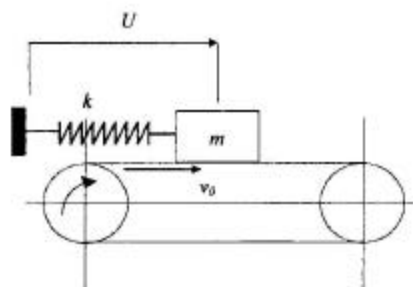


Figura 4: Sistema auto-excitado.

A principal característica deste oscilador é que ele dissipa energia para grandes amplitudes enquanto, para pequenas amplitudes, absorve energia. Este sistema pode ser associado à alguns exemplos físicos cujo comportamento pode ser entendido considerando um sistema massa-mola que desliza sobre uma esteira que move-se com velocidade  $v_0$  (Nayfeh & Mook, 1979) – (Figura 4).

Com o objetivo de estudar fenômenos atmosféricos, *Lorenz (1963)* utilizou uma versão simplificada do modelo de *Rayleigh-Bernard* para convecção natural. O problema considera duas chapas com temperaturas diferentes, separadas por um fluido. A temperatura da chapa superior é menor do que a da inferior (Figura 5). O gradiente de temperatura induz o fluido a se movimentar de forma ascendente enquanto o efeito da gravidade induz o fluido a se movimentar de forma descendente. A interação entre estes dois fatores gera fenômenos bastante interessantes. Para descrever este fenômeno, é necessário considerar as equações de Navier-Stokes, da continuidade e da condução de calor. A simplificação proposta por Lorenz (*Schuster, 1989*) está apresentada a seguir,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x) \\ \dot{y} &= \beta x - y - xz, \\ \dot{z} &= \gamma z - xy\end{aligned}\quad (5)$$

onde  $x$  é proporcional a velocidade de circulação do fluido,  $y$  caracteriza a diferença de temperatura entre elementos de fluidos ascendentes e descendentes e  $z$  é proporcional aos desvios da temperatura vertical desde o valor de equilíbrio.  $\alpha$  é um parâmetro associado ao Número de Prandtl, que relaciona viscosidade e condutividade térmica,  $\beta$  está relacionado com o gradiente de temperatura enquanto  $\gamma$  é um fator geométrico.

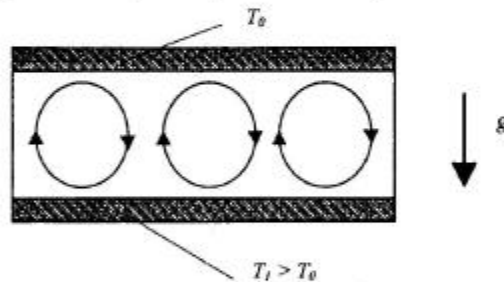


Figura 5: Modelo de Lorenz para Convecção Natural.

### 3. COMPORTAMENTO CAÓTICO

Um sistema dinâmico pode ser expresso da seguinte forma,

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n. \quad (6)$$

Isto significa que um campo vetorial,  $x$ , está sendo submetido a uma transformação imposta por  $f$ . O espaço das variáveis dependentes do sistema,  $x$ , é definido como o *espaço fase* (*Wiggins, 1990*). Um *ponto de equilíbrio* ou *ponto fixo* de um sistema dinâmico é definido como sendo o ponto em que o sistema pode permanecer estacionário, ou seja, um ponto onde a solução não varia com o tempo. Assim, se  $\bar{x} \in R^n$  for um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico, então  $f(\bar{x}) = 0$  (*Guckenheimer & Holmes, 1983*).

Considere o oscilador de Duffing, cuja equação do movimento está apresentada em (3). Escrevendo na forma do sistema dinâmico proposto, faz-se  $x = u$  e  $y = \dot{u}$ , de onde chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \alpha y - \omega_0^2 x - \beta x^3 + \mu \operatorname{sen}(\Omega t) \end{aligned} \quad (7)$$

Os parâmetros do sistema definem a natureza do comportamento. Por exemplo, considere  $\alpha = 0.05$ ,  $\omega_0^2 = -0.2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 1$ . Variando-se o valor do parâmetro de forçamento  $\mu$ , pode-se avaliar quais as excitações mais críticas. A resposta do sistema será observada de duas maneiras. Na primeira, considera-se a evolução da resposta do sistema no tempo. Na segunda, olha-se para o espaço fase. Tomando-se  $\mu = 4$ , tem-se um comportamento periódico, bem comportado, que se repete com o tempo, conforme mostra a Figura 6a. A Figura 6b caracteriza este comportamento através de uma curva fechada. Por outro lado, tomando-se  $\mu = 7.5$ , o sistema passa a apresentar um comportamento não-periódico, difícil de ser previsto. A Figura 7 mostra esta não-periodicidade. Na Figura 7b, este comportamento é representado através de uma curva que nunca se fecha. A não-periodicidade e conseqüente imprevisibilidade, caracterizam o *caos*.

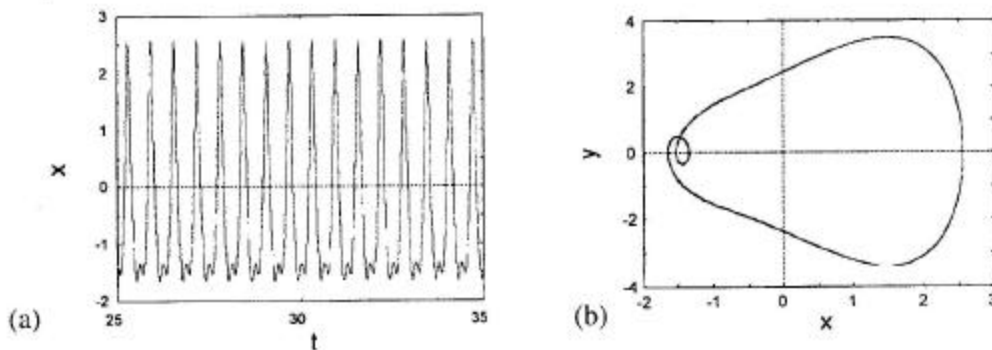


Figura 6: Resposta periódica. (a) Evolução no tempo; (b) Espaço fase.

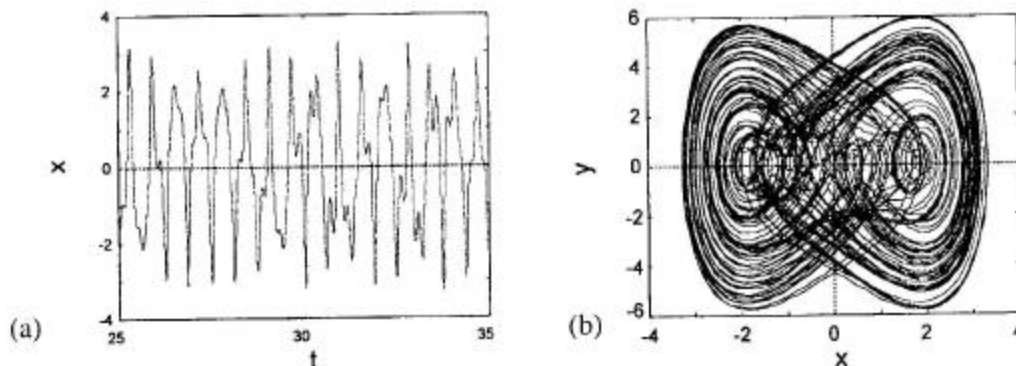


Figura 7: Resposta caótica. (a) Evolução no tempo; (b) Espaço fase.

A *seção de Poincaré* elimina uma dimensão do sistema permitindo que se transforme um sistema contínuo no tempo em um mapeamento discreto (Thompson & Stewart, 1986). Uma maneira de se definir a seção de Poincaré é observar uma dada órbita apenas em pontos discretos, estroboscopicamente tomados em uma superfície (Figura 8).

Um outro procedimento útil para a análise do comportamento caótico é o *diagrama de bifurcação*. O termo bifurcação foi usado pela primeira vez por Poincaré para expressar uma divisão das soluções de equilíbrio. De uma maneira mais geral, entende-se bifurcação como uma mudança qualitativa na estrutura de uma solução, como consequência da variação dos parâmetros do sistema (Wiggins, 1990). O diagrama de bifurcação apresenta a distribuição estroboscópica da resposta do sistema a partir de uma variação lenta de um dado parâmetro (Thompson & Stewart, 1986). Desta forma, é possível ter-se uma visão global sobre os efeitos da variação deste parâmetro na resposta. A Figura 9 apresenta o diagrama de bifurcação para o oscilador de Duffing. O parâmetro que está sendo variado é a amplitude do forçamento periódico,  $\mu$ . Deve-se observar que existem regiões onde o parâmetro  $\mu$  está associado a um número finito de pontos, assim como regiões onde ele está associado a uma nuvem de pontos. O comportamento caótico ocorre nas regiões onde existe uma nuvem de pontos.

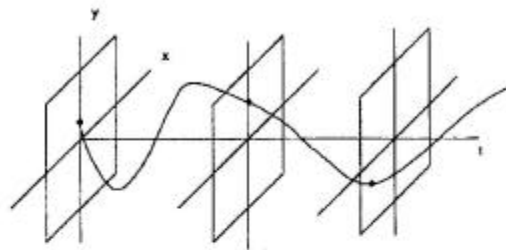


Figura 8: Seção de Poincaré

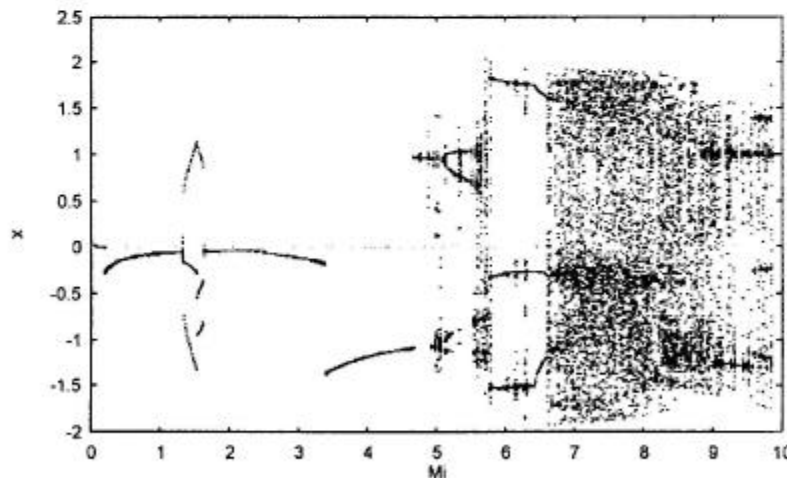


Figura 9: Diagrama de bifurcação mostrando o deslocamento sob a variação da amplitude de forçamento.

#### 4. FERRADURA DE SMALE

Um sistema dinâmico pode ser entendido como um campo vetorial,  $x$ , que está sendo submetido a uma transformação imposta por uma função  $f$ ,  $\dot{x} = f(x,t)$ . Pode-se olhar para estas transformações do ponto de vista geométrico, visando avaliar a maneira como uma forma específica é transformada pela função  $f$ , na medida que o tempo evolui. Desta forma, faz-se uma análise qualitativa do sistema dinâmico objetivando entender o comportamento global do sistema. A base para esta análise é a *topologia*, que pode ser entendida como a ciência que trata as transformações contínuas e as propriedades geométricas de alguns objetos sob a ação de transformações (Singer & Thorpe, 1967).

Considere então, um quadrado unitário,  $D$ , submetido à ação da função  $f$  que o transforma de tal forma que contrai em uma direção enquanto o expande em outra, deformando  $D$  de modo que ele se mantenha no espaço original. Assim,  $f$  transforma  $D$ , conforme mostra a Figura 10.

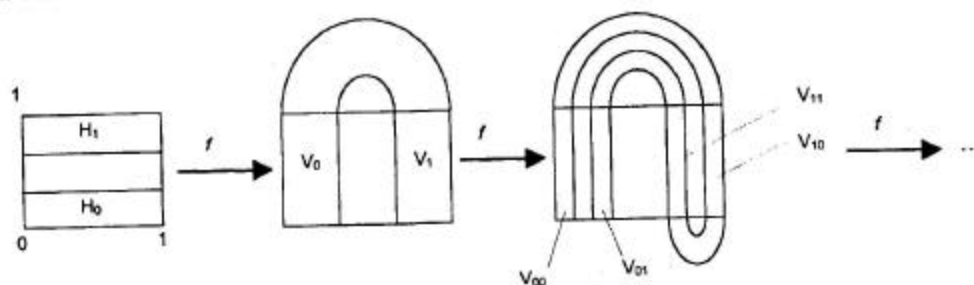


Figura 10: Sequência de transformações impostas ao quadrado  $D$  pela função  $f$ .

De maneira análoga, pode-se pensar em uma transformação inversa, de tal forma que a contração e a expansão de  $D$  seriam tomadas de forma diferente, conforme mostra a Figura 11.

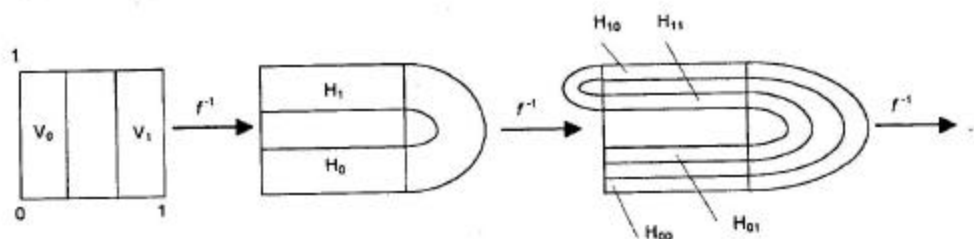


Figura 11: Sequência de transformações impostas ao quadrado  $D$  pela função inversa de  $f$ .

No limite, a interseção das transformações impostas por  $f$  (linhas verticais – Figura 10) com aquelas impostas por  $f^{-1}$  (linhas horizontais – Figura 11), formam um conjunto



invariante de pontos (Wiggins, 1990; Guckenheimer & Holmes, 1983). Este conjunto possui a forma de um *conjunto de Cantor* que é fechado e totalmente desconexo, possuindo uma infinidade incontável de pontos (Moon, 1992). Estas transformações implicam que, a um ponto qualquer de  $D$ ,  $p$ , pode-se associar uma vizinhança,  $\epsilon$ , que pode ser infinitamente pequena, e onde pode-se escolher um outro ponto qualquer,  $\tilde{p}$ . Após a função  $f$  atuar um número finito de vezes, pode-se observar que os pontos  $p$  e  $\tilde{p}$  estão separados de uma distância finita. Diz-se então que o sistema possui *forte dependência das condições iniciais* (Wiggins, 1988). Esta propriedade caracteriza o comportamento caótico de um sistema dinâmico. Trata-se do *efeito borboleta*, mencionado por Lorenz, e das *causas muito diminutas*, enunciadas por Poincaré, para caracterizar a imprevisibilidade dos sistemas com comportamento caótico.

A forma de ferradura, assumida pelo quadrado unitário após uma transformação imposta por  $f$ , é que identifica o que se chama de *ferradura de Smale*. A existência da ferradura de Smale é uma das características de um sistema dinâmico que experimenta um movimento caótico. Holisticamente, o processo de formação desta ferradura tem sido visualizada como a *transformação do padeiro*, onde associa-se o quadrado unitário,  $D$ , à massa de pão que é preparada a partir de movimentos de contração-expansão-dobramento (Gleick, 1987; Stewart, 1991).

O movimento caótico de um sistema dinâmico pode ser caracterizado pela existência da ferradura de Smale. Assim, sob determinadas condições, a função  $f$  irá transformar o sistema de forma que existirá, em direções distintas, uma expansão, uma contração e uma deformação (ou dobramento). Esta constatação impõe que um sistema dinâmico necessita de pelo menos 3 dimensões para exibir um comportamento caótico (Wiggins, 1990; Guckenheimer & Holmes, 1983).

De forma rigorosa, a existência da ferradura é uma condição necessária, mas não suficiente, para a existência do caos. A ferradura de Smale define o mecanismo de formação de uma estrutura *fractal*, que é o *conjunto de Cantor* (Moon, 1992). A Figura 12 mostra um caso típico da obtenção do conjunto a partir de um segmento de reta unitário. A regra para a construção do conjunto é dividir indefinidamente o segmento de reta em três partes, onde duas permanecem e uma é desconsiderada.

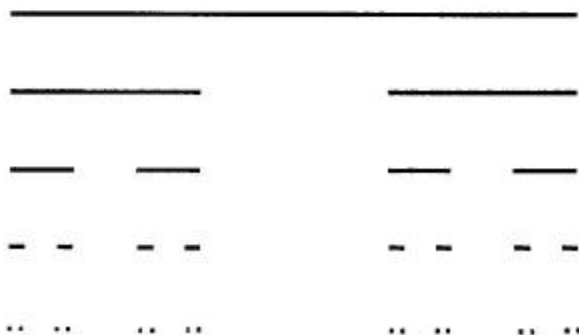


Figura 12: Conjunto de Cantor obtido a partir de um segmento de reta unitário.

O conjunto de Cantor possui uma estrutura com *auto-similaridade* como uma consequência de sua lei de formação (Barnsley, 1988). A auto-similaridade implica que, se uma parte do conjunto for ampliada, esta será idêntica ao conjunto original. Isto proporciona uma natureza fracionária para a estrutura do conjunto uma vez que o segmento de reta original será substituído por um conjunto de pontos que jamais ocuparão toda a dimensão original (1-Dim), mas que também jamais terá uma dimensão nula. Diz-se que o conjunto possui uma natureza *fractal*, como uma alusão ao termo fracionário.

*Atrator* é o conjunto limite para o qual se converge na medida em que o tempo evolui. Existem atratores de diversas dimensões. Por exemplo, um único ponto representa um atrator de dimensão zero, enquanto uma linha, é um atrator de dimensão 1. O comportamento caótico apresenta o que se chama *atrator estranho* que possui uma dimensão *fractal* ou *fracionária* (Wiggins, 1990; Guckenheimer & Holmes, 1983). Existem muitas formas para se quantificar a dimensão de um sistema dinâmico. Farmer et al. (1983) apresentam uma revisão sobre as principais formas. O *método da capacidade de Komolgorov* ou *método das caixas* consiste em determinar quantos cubos de lado  $\epsilon$ , ou esferas de raio  $\epsilon$ ,  $N(\epsilon)$ , são necessários para conter todo o conjunto de pontos. Assim, se  $\epsilon$  variar, o número de cubos irá variar com a seguinte relação (Mullin, 1993):

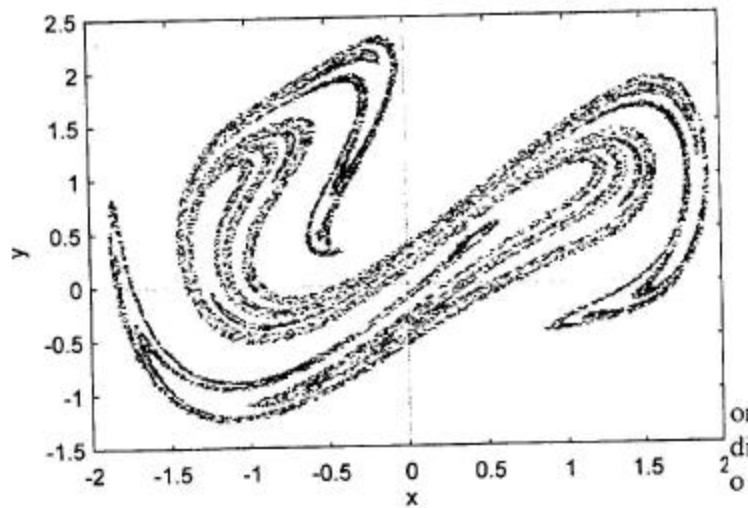
$$N(\epsilon) \approx \frac{1}{\epsilon^D} \tag{8}$$

A definição da dimensão de um conjunto pode, então, ser feita da seguinte forma,

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log[N(\epsilon)]}{\log(1/\epsilon)} \tag{9}$$

A Figura 13 apresenta a seção de Poincaré para o oscilador de Duffing quando  $\mu = 7.5$ . A resposta apresenta um atrator estranho com dimensão fractal,  $D = 1.73$ , o que significa que está entre 1, que seria um segmento de reta, e 2, o plano. O atrator possui uma estrutura lamelar que tende a se repetir.

Figura 13: Seção de Poincaré do movimento caótico: Atrator Estranho.



A presença da estrutura fractal no sistema dinâmico, apesar de não estar necessariamente associada ao caos, pode estar associada a imprevisibilidade no sentido de provocar uma forte dependência das condições iniciais. Isto estaria associado a fronteira fractal de uma *bacia de atração* de um dado *ponto de equilíbrio*. Um atrator captura todas as órbitas que se iniciem na sua bacia de atração. Se a fronteira de dois atratores é suave, isto caracteriza duas regiões distintas que podem ser bem definidas. Se por outro lado, a fronteira for fractal, isto significa que dois pontos indefinidamente próximos podem levar a pontos de equilíbrio distintos, o que torna impossível prever a evolução do sistema (Moon, 1992).

## 5. EXPOENTES DE LYAPUNOV

A forte dependência das condições iniciais, característica fundamental dos sistemas caóticos, pode ser quantificada através dos *expoentes de Lyapunov*, que definem a média da razão exponencial em que se diverge da vizinhança de uma dada trajetória. A definição deste parâmetro é de essencial importância na caracterização do caos, sendo um critério totalmente aceito (Kapitaniak, 1991).

Considere uma trajetória do sistema dinâmico, que evolui a partir de uma condição inicial. Considere também uma vizinhança desta trajetória, que pode ser definida por uma esfera de diâmetro  $d_0$ . De cada ponto desta esfera, partirá uma nova trajetória e o conjunto de todas as trajetórias possíveis formará, em cada tempo  $t$ , esferas deformadas. Deseja-se avaliar como duas trajetórias, suficientemente próximas, divergem uma da outra na medida que o sistema evolui. Em outras palavras, deseja-se avaliar como a esfera inicial se comporta na medida que o tempo evolui (Figura 14).

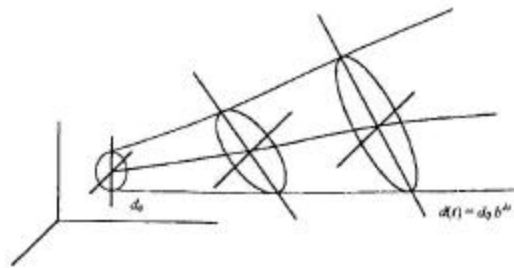


Figura 14: Avaliação dos expoentes de Lyapunov.

A variação do diâmetro desta esfera pode ser expressa a partir da seguinte expressão,

$$d(t) = d_0 b^{\lambda t}, \quad (10)$$

onde  $b$  é uma base de referência. Se o expoente  $\lambda$  for negativo ou nulo, as trajetórias não divergem. Se por outro lado,  $\lambda$  for positivo, indica que as trajetórias divergem, caracterizando o caos.

Algoritmos próprios devem ser considerados para avaliar os expoentes de Lyapunov (Wolf et al., 1985; Parker & Chua, 1989). A divergência de uma trajetória caótica é localmente exponencial. Todavia, uma distância  $d$  desta trajetória não deve ir para infinito uma vez que ela representa um sistema físico. Desta forma, para avaliar a média desta divergência das trajetórias, deve-se tomar uma média do crescimento exponencial em vários pontos sobre a trajetória. Assim, quando a distância  $d(t)$  torna-se muito grande, define-se um novo  $d_0(t)$  para reavaliar a divergência (Figura 15). Com isso, é possível definir uma média capaz de medir a divergência.

Neste contexto, definem-se os expoentes de Lyapunov da seguinte forma,

$$\lambda = \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{k=1}^n \log_b \left( \frac{d(t_k)}{d_0(t_{k-1})} \right) \quad (11)$$

Voltando ao oscilador de Duffing, pode-se observar que os expoentes convergem para um valor específico. Como o sistema possui dimensão 2, o espectro de Lyapunov é composto de dois expoentes,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . No caso de um comportamento bem comportado ( $\mu = 4$ ), os dois expoentes são negativos (Figura 16a). Quando o sistema apresenta comportamento caótico ( $\mu = 7.5$ ), um expoente será positivo (Figura 16b).

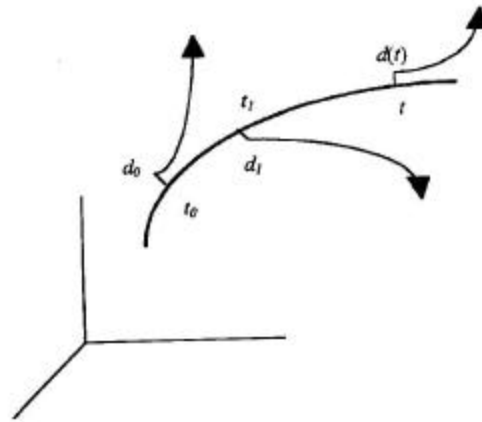


Figura 15: Cálculo dos expoentes de Lyapunov.

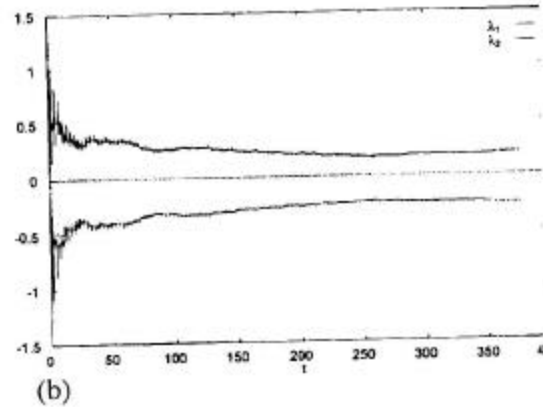
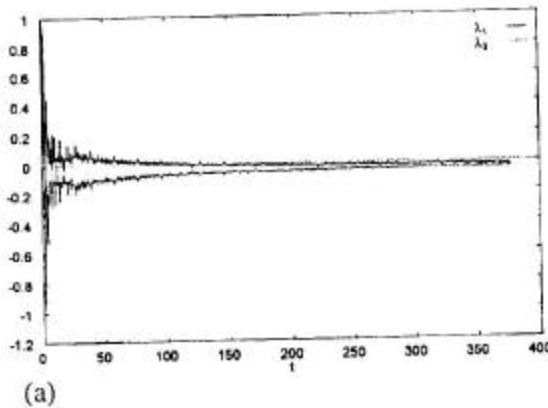


Figura 16: Evolução no tempo dos expoentes de Lyapunov. (a) Movimento periódico; (b) Movimento caótico.

A partir do espectro de Lyapunov, é possível formular um procedimento que avalie a dimensão do atrator. Considere o espectro de Lyapunov, ordenado de forma crescente. A dimensão de Lyapunov é definida da seguinte forma (Wolf et al., 1983):

$$D = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \quad (12)$$

onde  $j$  é definido a partir das seguintes condições,

$$\sum_{i=1}^j \lambda_i > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0 \quad (13)$$

## 6. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma revisão sobre as principais características do *caos* em sistemas mecânicos. Para que um sistema dinâmico apresente uma resposta caótica é necessário que ele possua características *não-lineares*. Neste caso, dependendo dos parâmetros deste sistema, ele pode responder caoticamente. Discutiu-se aqui que o caos possui *forte dependência das condições iniciais*. Além disso, uma resposta caótica deve estar associada a existência da *ferradura de Smale*, o que caracteriza a presença de uma estrutura *fractal*. Como consequência desta condição, o sistema dinâmico deve possuir dimensão maior ou igual a 3 para que possa experimentar o movimento caótico. A resposta caótica possui ainda um *atrator estranho*, do tipo de um *conjunto de Cantor*, com *dimensão fractal*. Os *expoentes de Lyapunov* constituem outra forma para se quantificar o caos. Quando um sistema apresenta resposta caótica, pelo menos um expoente do espectro de Lyapunov deve ser positivo. Isto significa que duas trajetórias, suficientemente próximas, divergem exponencialmente na medida que o tempo evolui.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARGYRIS, J. (1991), "χαος: An Adventure in Chaos", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 91, pp. 997-1091.
- BARNESLEY, M. (1988), "*Fractals Everywhere*", Academic Press.
- FARMER, J. D., OTT, E. & YORKE, J. A. (1983), "The Dimension of Chaotic Attractors", *Physica 7D*, pp. 153-180.
- GLEICK, J. (1987), "*Caos*", Campus, Rio de Janeiro.
- GREBOGI, C., OTT, E. & YORKE, J. A. (1983), "Crises, Sudden Changes in Chaotic Attractors, and Transient Chaos", *Physica 7D*, pp. 181-200.
- GUCKENHEIMER, J. & HOLMES, P. (1983), "*Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*", Springer-Verlag, New York.

- HAKEN, H. (1985), "Order in Chaos", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.52, pp. 635-652.
- HILBORN, R. C. (1994), "*Chaos and Nonlinear Dynamics*". Oxford Press.
- HOLMES, P. (1989), "Nonlinear Dynamics, Chaos and Mechanics", *Applied Mechanics Review*, v.43, n.2-5, pp. 23-29.
- IOOS, G., HELLEMAN, R. H. G. & STORA, R. (1983), "*Chaotic Behavior of Deterministic Systems*", North-Holland.
- KADANOFF, L. P. (1983), "Roads to Chaos", *Physics Today*, pp. 46-53.
- KAPITANIAK, T. (1991), "*Chaotic Oscillations in Mechanical Systems*", Manchester.
- LORENZ, E. N. (1996), "*A Essência do Caos*", Editora UnB.
- LORENZ, E. N. (1963), "Deterministic Nonperiodic Flow", *Journal of Atmospheric Science*, v.20, pp. 130-141.
- MEIROVITCH, L. (1986), "*Elements of Vibration Analysis*", McGraw Hill.
- MULLIN, T. (1993), "*The Nature of Chaos*", Oxford Press.
- MOON, F. (1992), "*Chaotic and Fractal Dynamics*", John Wiley & Sons, New York.
- MOON, F. (1980), "Experiments on Chaotic Motions of a Forced Nonlinear Oscillator: Strange Attractors", *Journal of Applied Mechanics*, v.47, pp. 638-644.
- NAYFEH, A. H. & MOOK, D. T. (1979), "*Nonlinear Oscillations*", John Wiley & Sons.
- OTT, E. (1993), "*Chaos in Dynamical Systems*", Cambridge Press.
- PARKER, T. S. & CHUA, L. O. (1989), "*Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*", Springer-Verlag, New York.
- RUELLE, D. (1991), "*Chance and Chaos*", Princeton University Press.
- SCHUSTER, H. G. (1989), "*Deterministic Chaos*", VCH.
- SINGER, I. M. & THORPE, J. A. (1967), "*Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*", Scott, Foresman & Company.
- STEWART, I. (1991), "*Será que Deus Joga Dados? A Nova Matemática do Caos*", Jorge Zahar Editor.
- THOMPSON, J. M. T. & STEWART, H. B. (1986), "*Nonlinear Dynamics and Chaos*", John Wiley & Sons, Chichester.
- THOMPSON, J. M. T. (1989), "Chaotic Dynamics and the Newtonian Legacy", *Applied Mechanics Review*, v.42, n.1, pp. 15-25.
- WIGGINS, S. (1988), "*Global Bifurcations and Chaos*", Springer-Verlag, New York.
- WIGGINS, S. (1990), "*Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*", Springer-Verlag, New York.
- WOLF, A., SWIFT, J. B., SWINNEY, H. L. & VASTANO, J. A. (1985) - "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series", *Physica 16D*, pp. 285-317.